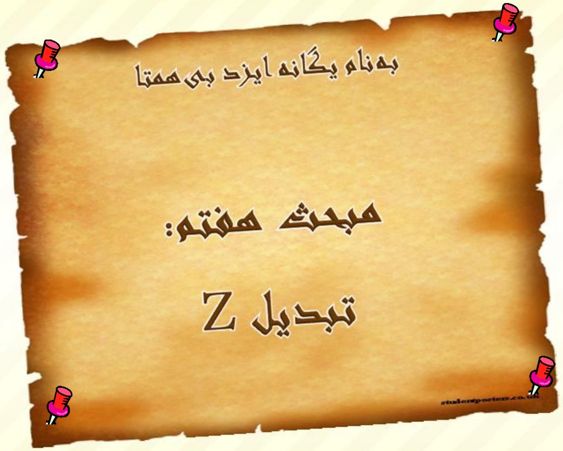
تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
(سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

Presented by: Dr. Maleki   Spring 2012   http://sun.semnan.ac.ir/~maleki



2

فهرست مطالب:

3

معرفی تبدیل Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

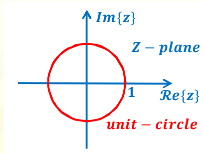
$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

از آنجا که $z = re^{j\omega}$ است آیا می‌توان گفت تبدیل فوریه حالت خاصی از تبدیل Z است؟

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z = e^{j\omega}} \quad or \quad r = 1$$

روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی Z ، تبدیل Z به تبدیل فوریه‌ی زمان گسسته ساده می‌شود.



4

یادآوری:

در مقایسه با تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z را می‌توان به سیستم‌های ناپایدار نیز اعمال نمود. از این رو، نقش مهمی در بررسی پایداری یا ناپایداری سیستم‌ها دارند.

5

مثال:

تبدیل Z سیگنال‌های زیر را به دست آورید. در هر مورد، محل قطب‌ها و صفرهـا و ناحیــه‌ی همگرایی در صفحه z را مشخص نمایید.

الف: $\delta[n]$

ب: $u[n]$

ج: $\alpha^n u[n]$

د: $-\alpha^n u[-n-1]$

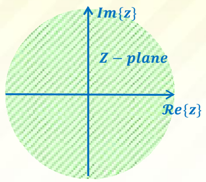
6

حل الف:

$$\mathrm{Z}\{\delta[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n]$$

$$= 1 \qquad ROC\text{:}\ \ entire\ z-plane$$



$$\Rightarrow \delta[n] \xleftrightarrow{z} 1 \qquad ROC\text{:}\ \ entire\ z-plane$$

7

حل ب:

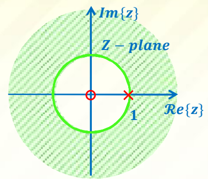
$$\mathrm{Z}\{u[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC\text{:}\ \ |z^{-1}| < 1\ \ or\ \ |z| > 1$$

$$= \frac{z}{z-1} \qquad zero\text{:}\ \ z = 0 \qquad pole\text{:}\ \ z = 1$$



$$\Rightarrow u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC\text{:}\ \ |z| > 1$$

8

حل ج:

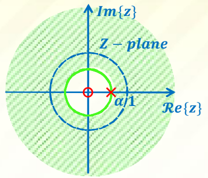
$$Z\{\,\alpha^n u[n]\,\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha^n u[n] z^{-n}$$

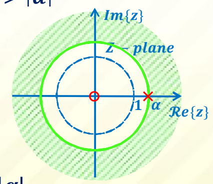
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |\alpha z^{-1}| < 1 \ \ or\ \ |z| > |\alpha|$$

$$= \frac{z}{z-\alpha} \qquad \begin{matrix} zero:\ z = 0 \\ pole:\ z = \alpha \end{matrix}$$





$$\Rightarrow \alpha^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |\alpha|$$

حل د:

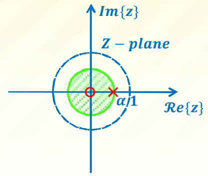
$$Z\{\,-\alpha^n u[-n-1]\,\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n}$$

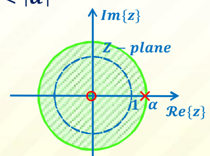
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} (\alpha z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |\alpha z^{-1}| > 1 \ \ or\ \ |z| < |\alpha|$$

$$= \frac{z}{z-\alpha} \qquad \begin{matrix} zero:\ z = 0 \\ pole:\ z = \alpha \end{matrix}$$





$$\Rightarrow -\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| < |\alpha|$$

مثال:

تبدیل Z سیگنال‌های زیر را به دست آورید. در هر مورد، محل قطب‌ها و صفرهـا و ناحیــه‌ی همگرایی در صفحه z را مشخص نمایید.

الف: $\delta[n]$

ب: $u[n]$

ج: $\alpha^n u[n]$

د: $-\alpha^n u[-n-1]$

جمع‌بندی

$$\Rightarrow \delta[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} 1 \qquad ROC:\ entire\ z-plane$$

$$\Rightarrow u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > 1$$

$$\Rightarrow \alpha^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |\alpha|$$

$$\Rightarrow -\alpha^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad ROC:\ |z| < |\alpha|$$

مثال:

تبدیل Z سیگنال زیر را به دست آورید. همچنین محل قطب‌ها و صفرها و ناحیه‌ی همگرایی در صفحه z را مشخص نمایید.

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2j}\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)^n \right\}$$

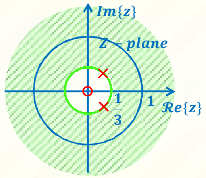
$$= \frac{1}{2j}\left\{ \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} \right\} = \frac{\frac{1}{2j}\frac{1}{3}z^{-1}\left(e^{j\frac{\pi}{4}} - e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}$$

$$ROC:\ \left|\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right| < 1 \ \ or\ \ |z| > \frac{1}{3} \qquad \left|\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right| < 1 \ \ or\ \ |z| > \frac{1}{3} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2j}\,\frac{1}{3}\,z^{-1}\left(e^{j\frac{\pi}{4}}-e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} \quad |z|>\frac{1}{3} \qquad = \frac{\frac{1}{3}\,z^{-1}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} \quad |z|>\frac{1}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} \quad |z|>\frac{1}{3}$$

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\,z}{\left(z-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$



$zeros:\ \ z=0 \quad \& \quad z=\infty$

$poles:\ \ z=\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \& \quad z=\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} \quad ROC:\ |z|>\frac{1}{3}$$

مثال:

برای کدام یک از موارد دو مثال قبل می‌توان تبدیل فوریه نوشت؟

از آنجا که $X(e^{j\omega}) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ بنابراین اگر $X(z)$ در $z=e^{j\omega}$ همگرا شود یا به عبارت دیگر، دایره‌ی واحد در ناحیه همگرایی $X(z)$ باشد می‌توان برای سیگنال، تبدیل فوریه نوشت.

می‌توان نوشت. $\quad \delta[n] \xleftrightarrow{z} 1 \quad ROC:\ entire\ z-plane$

نمی‌توان نوشت. $\quad u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ROC:\ |z|>1$

برای $|\alpha|<1$ می‌توان نوشت. $\quad \alpha^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC:\ |z|>|\alpha|$

برای $|\alpha|>1$ می‌توان نوشت. $\quad -\alpha^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \quad ROC:\ |z|<|\alpha|$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}\,z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)} \quad ROC:\ |z|>\frac{1}{3}$$

می‌توان نوشت.

ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی

۱- ناحیه‌ی همگرایی (ROC) تبدیل z حلقه‌هایی به مرکز مبدا صفحه‌ی z است.

۲- ROC شامل قطب‌ها نیست و مرز ROC توسط قطب‌ها مشخص می‌گردد.

۳- اگر سیگنال در فاصله‌ی محدودی از زمان مقدار داشته باشد ROC آن کل صفحه‌ی z خواهد بود ولی ممکن است $z=0$ یا $z=\infty$ در ناحیه‌ی همگرایی نباشد.

۴- اگر سیگنال دو طرفه با طول نامحدود باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل z آن حداکثر یک حلقه‌ی محدود خواهد بود.

۵- اگر سیگنال دست راستی باشد ROC تبدیل z آن نیز دست راستی خواهد بود. یعنی چنانچه نقطه‌ای با $|z|=r_0$ جزء ناحیه‌ی همگرایی باشد تمام نقاطی از صفحه‌ی z که $|z|\geq r_0$ است نیز جزء ناحیه‌ی همگرایی خواهد بود.

۶- اگر سیگنال دست چپی باشد ROC تبدیل z آن نیز دست چپی خواهد بود.

فهرست مطالب:

مثال:

برای هر یک از سیگنال‌های زیر، تبدیل z و ناحیه‌ی همگرایی آن را تعیین نمایید.

الف: $x[n] = \delta[n]$

ب: $x[n] = \delta[n-1]$

ج: $x[n] = \delta[n+1]$

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] = 1$$

$ROC:\ entire\ z-plane$

$$Z\{\delta[n-1]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n-1] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, z^{-1} = z^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] = z^{-1}$$

$ROC:\ entire\ z-plane\ except\ z=0$

$$Z\{\delta[n+1]\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n+1] z^{-n} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, z^{+1} = z \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta[n] = z$$

$ROC:\ entire\ z-plane\ except\ z=\infty$

یادآوری

۳- اگر سیگنال در فاصله‌ی محدودی از زمان مقدار داشته باشد ROC آن کل صفحه z خواهد بود ولی ممکن است $z=0$ یا $z=\infty$ در ناحیه‌ی همگرایی نباشد.

17

مثال:

برای سیگنال زیر، تبدیل z و ناحیه‌ی همگرایی آن را تعیین نمایید.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

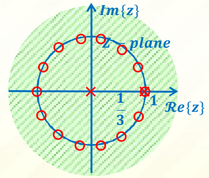
$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (a z^{-1})^n = \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$

$zeros:\ z = ae^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

$poles:\ z = a\ \ \&\ \ z = 0\ (order\ N-1)$

$ROC:\ entire\ z-plane\ except\ z=0$



یادآوری

۳- اگر سیگنال در فاصله‌ی محدودی از زمان مقدار داشته باشد ROC آن کل صفحه z خواهد بود ولی ممکن است $z=0$ یا $z=\infty$ در ناحیه‌ی همگرایی نباشد.

18

مثال:

برای سیگنال روبرو، تبدیل z و ناحیه‌ی همگرایی آن را تعیین نمایید. $x[n] = b^{|n|} \quad b>0$

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (b^{-1}z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (bz^{-1})^n$$

$$= \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$|bz| < 1 \quad |bz^{-1}| < 1$

$|z| < \frac{1}{b} \quad |z| > b$

$if\ b > 1 \Rightarrow$ تبدیل z وجود ندارد.

$$if\ b < 1 \Rightarrow X(z) = \frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} \quad ROC:\ b < |z| < \frac{1}{b}$$

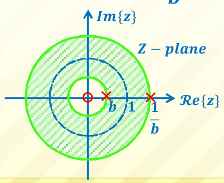
$$X(z) = \frac{-z}{z-b^{-1}} + \frac{-z}{z-b} = \frac{z(b-b^{-1})}{(z-b^{-1})(z-b)}$$

$zeros:\ z = 0\ \ \&\ \ z = 0$

$poles:\ z = b\ \ \&\ \ z = b^{-1}$

یادآوری

۴- اگر سیگنال دو طرفه با طول نامحدود باشد ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z آن حداکثر یک حلقه‌ی محدود خواهد بود.



19

فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل Z
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z
- ☐ وارون تبدیل Z
- ☐ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه از نمودار قطب-صفر
- ☐ ویژگی‌های تبدیل Z
- ☐ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی Z
- ☐ نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
- ☐ تبدیل Z یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

وارون تبدیل Z

می‌خواهیم با استفاده از رابطه‌ی تبدیل Z و زوج تبدیل فوریه، رابطه وارون تبدیل Z را به دست آوریم.

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad , \qquad z=re^{j\omega}$$

$$\Rightarrow X(re^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{-n}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow r^{-n}x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(re^{j\omega})$$

$$\Rightarrow r^{-n}x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Rightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^{n}d\omega$$

$$z=re^{j\omega}\Rightarrow \frac{dz}{d\omega}=jre^{j\omega}\Rightarrow d\omega=\frac{dz}{jz}$$

$$\Rightarrow x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

انتگرال‌گیری در جهت پادساعتگرد روی کانتور دایره‌ای به شعاع r حول مبدا.

روش‌های محاسبه‌ی وارون تبدیل Z :

۱- استفاده از رابطه‌ی انتگرالی وارون تبدیل Z . $\quad x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$

۲- بسط کسرهای جزئی.

۳- بسط سری‌های توانی:

- روش تقسیم متوالی
- استفاده از بسط‌های معروف

واژه‌نامه:

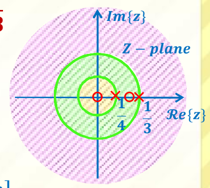
بسط کسرهای جزئی	partial fraction expansion
بسط سری توانی	power series expansion

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را برای هر یک از ROC های ممکن، به روش بسط کسرهای جزئی بیابید.

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{z\left(3z-\frac{5}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad zeros:\ z=0\ \&\ z=\frac{5}{18} \qquad poles:\ z=\frac{1}{4}\ \&\ z=\frac{1}{3}$$



$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$for\ \ ROC: |z|>\frac{1}{3}\Rightarrow x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]+2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

$$for\ \ ROC: \frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}\Rightarrow x[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[-n-1]$$

$$for\ \ ROC: |z|<\frac{1}{4}\Rightarrow x[n]=-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[-n-1]-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[-n-1]$$

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را به روش بسط سری توانی بیابید.

$$X(z)=4z^{2}+2+3z^{-1}$$

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow X(z)=\cdots+x[-2]z^{+2}+x[-1]z^{+1}+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x[-2]=4 \\ x[0]\ \ =2 \\ x[1]\ \ =3 \\ x[k]=0\ \ for\ other\ k \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n]=4\,\delta[n+2]+2\,\delta[n]+3\,\delta[n-1]$$

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را به روش بسط سری توانی – روش تقسیم متوالی بیابید.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-az^{-1} \\ \cline{2-2} \underline{-(1-az^{-1})} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots \\ \quad az^{-1} & \\ \quad \underline{-(az^{-1}-a^2z^{-2})} & \\ \qquad a^2z^{-2} & \\ \qquad \underline{-(a^2z^{-2}-a^3z^{-3})} & \\ \qquad\quad a^3z^{-3} & \end{array}$$

توجه:

برای سیگنال دست راستی، عبارت‌های صورت و مخرج به صورت توان‌های نزولی z (یا توان‌های صعودی z^1) مرتب می‌شوند.

$$\Rightarrow X(z)=1+a\,z^{-1}+a^2\,z^{-2}+a^3\,z^{-3}+\cdots$$

از طرفی می‌دانیم:

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow X(z)=\cdots+x[-2]z^{+2}+x[-1]z^{+1}+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

$$\Rightarrow x[n]=a^n\,u[n]$$

25

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را به روش بسط سری توانی – روش تقسیم متوالی بیابید.

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a|$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & -az^{-1}+1 \\ \cline{2-2} \underline{-(1-a^{-1}z)} & -a^{-1}z-a^{-2}z^2-a^{-3}z^3+\cdots \\ \quad a^{-1}z & \\ \quad \underline{-(a^{-1}z-a^{-2}z^2)} & \\ \qquad a^{-2}z^2 & \\ \qquad \underline{-(a^{-2}z^2-a^{-3}z^3)} & \\ \qquad\quad a^{-3}z^3 & \end{array}$$

توجه:

برای سیگنال دست چپی، عبارت‌های صورت و مخرج به صورت توان‌های صعودی z (یا توان‌های نزولی z^1) مرتب می‌شوند.

$$\Rightarrow X(z)=-a^{-1}\,z^1+a^{-2}\,z^2+a^{-3}\,z^3+\cdots$$

از طرفی می‌دانیم:

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow X(z)=\cdots+x[-2]z^{+2}+x[-1]z^{+1}+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

$$\Rightarrow x[n]=-a^n\,u[-n-1]$$

26

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را به روش بسط سری توانی – استفاده از بسط‌های معروف بیابید.

$$X(z)=log\,(1+az^{-1}) \qquad |z|>|a|$$

راهنمایی: $\quad log\,(1+v)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,v^n}{n} \qquad |v|<1$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,(a\,z^{-1})^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-a)^n}{n}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-a)^n}{n}\,u[n-1]z^{-1}$$

$$\Rightarrow x[n]=\frac{-(-a)^n}{n}\,u[n-1]$$

27

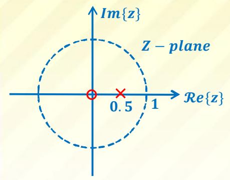
فهرست مطالب:

- [x] معرفی تبدیل Z
- [x] ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z
- [x] وارون تبدیل Z
- [ ] ارزیابی هندسی تبدیل فوریه از نمودار قطب-صفر
- [ ] ویژگی‌های تبدیل Z
- [ ] بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی Z
- [ ] نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
- [ ] تبدیل Z یک‌طرفه
- [ ] مثال‌ها

مثال:

نمودار قطب–صفر تابع انتقال سیستمی داده شده است.

اندازه و فاز تبدیل فوریه‌ی آن را تعیین نمایید.



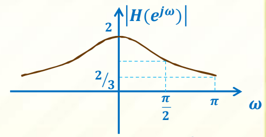
$$|H(j\omega)| = \frac{\text{طول بردار صفر}}{\text{طول بردار قطب}}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = (\text{زاویه‌ی بردار صفر}) - (\text{زاویه‌ی بردار قطب})$$

$$at\ \omega = 0, \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$at\ \omega = \frac{\pi}{2}, \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

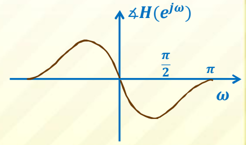
$$at\ \omega = \pi, \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$



$$at\ \omega = 0, \quad \measuredangle H(j\omega) = 0 - 0 = 0$$

$$at\ \omega = \frac{\pi}{2}, \quad \measuredangle H(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - tan^{-1}(2)\right)$$

$$at\ \omega = \pi, \quad \measuredangle H(j\omega) \cong \pi - \pi = 0$$



ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب–صفر

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\Rightarrow |X(e^{j\omega})| = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای صفر}}{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای قطب}}$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای صفر}) - (\text{مجموع زاویه‌ی بردارهای قطب})$$

ویژگی‌های تبدیل Z

- ویژگی خطی بودن
- ویژگی جابجایی زمانی
- ویژگی مقیاس در حوزه‌ی z
- ویژگی معکوس زمانی
- ویژگی گسترش زمانی
- ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن
- ویژگی کانولوشن
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z
- قضیه‌ی مقدار اولیه

فهرست مطالب:

ویژگی خطی بودن:

$x_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) \qquad ROC : \mathcal{R}_1$

$x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z) \qquad ROC : \mathcal{R}_2$

$$\Rightarrow \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \alpha\, X_1(z) + \beta\, X_2(z)$$

$ROC : containing\ \ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$

27

ویژگی جابجایی زمانی:

$x\,[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$

$\Rightarrow x\,[n - n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}\, X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$

ولی ممکن است تغییراتی در $z = 0$ و/یا $z = \infty$ در ROC رخ دهد.

29

مثال:

سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به صورت زیر داده شده است. تبدیل Z و ناحیه‌ی همگرایی سیگنال‌های $x_1[n]$ ، $x_2[n]$ و $x_1[n] - x_2[n]$ را به دست آورید.

$x_1[n] = a^n\, u[n]$

$x_2[n] = a^n\, u[n-1]$

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |a|$$

$$X_2(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a^n\, u[n-1]\, z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a\, z^{-1})^n = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} \qquad ROC:\ |z| > |a|$$

$$Z\{x_1[n] - x_2[n]\} = Z\{a^n\, u[n] - a^n\, u[n-1]\} = Z\{\,\delta[n]\,\} = 1$$

$ROC:\ \ entire\ z - plane$

توجه:

برای توابع rational ، حذف قطب و صفر ممکن است موجب گسترش ROC گردد.

34

مثال:

سیگنال $x[n]$ به صورت زیر داده شده است. عبارت و ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z سیگنال‌های $x[n]$ و $x[n+2]$ را به دست آورید.

$x[n] = \delta[n-1]$

$Z\{\delta[n-1]\} = z^{-1}\,, \qquad ROC: entire\ z - plane\ except\ z = 0$

$Z\{\delta[n+1]\} = z^2\, z^{-1} = z\,, \qquad ROC: entire\ z - plane\ except\ z = \infty$

در این مثال، جابجایی زمانی موجب تغییراتی در $z = 0$ و $z = \infty$ ناحیه‌ی همگرایی گردیده است.

36

ویژگی معکوس زمانی :

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad ROC : \frac{1}{\mathcal{R}}$$

ویژگی مقیاس در حوزه‌ی s :

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow (z_0)^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad ROC :$$

بسته به مقدار z_0 ، ناحیه‌ی همگرایی می‌تواند گسترش یابد، فشرده شود یا بدون تغییر باقی بماند.

حالت خاص: جابجایی فاز در حوزه‌ی z

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{j\omega_0} z) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن :

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$for\ x[n]: real \Rightarrow x^*[n] = x[n] \Rightarrow X^*(z^*) = X(z)$$

اگر سیگنال حقیقی باشد قطب‌ها و صفحه‌های تبدیل Z آن یا حقیقی‌اند یا جفت‌های مزدوج مختلط.

به عبارت دیگر، برای سیگنال حقیقی، نمودار قطب-صفر تبدیل Z نسبت به محور $\mathcal{R}e\{z\}$ متقارن است.

$$for\ x[n]: even \Rightarrow x[n] = x[-n] \Rightarrow X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$for\ x[n]: odd \Rightarrow x[n] = -x[-n] \Rightarrow X(z) = -X\left(\frac{1}{z}\right)$$

اگر سیگنال زوج یا فرد باشد چنانچه تبدیل Z آن قطب یا صفری در z_0 داشته باشد متناظر با آن، قطب یا صفری در $\frac{1}{z_0}$ نیز خواهد داشت.

ویژگی گسترش زمانی :

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow x_k[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & n = mk \\ 0 & n \neq mk \end{cases} \xleftrightarrow{z} X(z^k) \qquad ROC : \mathcal{R}^{\frac{1}{k}}$$

ویژگی کانولوشن:

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z) \qquad ROC: \mathcal{R}_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z) \qquad ROC: \mathcal{R}_2$$

$$\Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z).X_2(z) \quad ROC: containing\ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$$

27

چنانچه سیگنال حقیقی و زوج یا حقیقی و فرد باشد نمودار قطب–صفر آن نسبت به محور $Re\{z\}$ و همچنین دایره‌ی واحد تقارن خواهد داشت.

به عبارت دیگر، قطب‌ها و صفرهای به یکی از صورت‌های زیر خواهند بود:

- در $z = 1$ یا $z = -1$
- جفت‌های حقیقی متقارن نسبت به دایره‌ی واحد
- جفت‌های مزدوج مختلط روی دایره‌ی واحد
- چهارگانه‌های متقارن نسبت به دایره‌ی واحد و محور $Re\{z\}$

30

مثال:

با استفاده از ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z ، وارون تبدیل z عبارت زیر را به دست آورید.

$$X(z) = log\left(1 + az^{-1}\right) \qquad |z| > |a|$$

$$\Rightarrow x[n] \xleftrightarrow{z} log\left(1 + a\,z^{-1}\right) \quad ROC: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left(log\left(1 + a\,z^{-1}\right)\right) = \frac{-z\left(-a\,z^{-2}\right)}{1 + a\,z^{-1}} = \frac{a\,z^{-1}}{1 + a\,z^{-1}}$$

$$\Rightarrow n\,x[n] = a\,(-a)^{n-1}\,u[n-1]$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{-(-a)^n}{n}\,u[n-1]$$

44

ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی z :

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow n\,x[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{d}{dz}\left(X(z)\right) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

27

قضیه‌ی مقدار اولیه و قضیه‌ی مقدار نهایی:

اگر $x[n] = 0 \ \ for \ \ n < 0$ باشد آنگاه:

Initial value theorem: $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

Final value theorem: $\lim_{n \to \infty} x[n] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z)$

اثبات قضیه‌ی مقدار اولیه:

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

از آنجا که $x[n] = 0 \ \ for \ \ n < 0$ می‌باشد داریم:

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow X(z) = x[0] + \frac{x[1]}{z^1} + \frac{x[2]}{z^2} + \frac{x[3]}{z^3} + \cdots \qquad \Rightarrow \lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$$

42

بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی Z

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$H(z)$: تابع سیستم یا تابع انتقال

$H(e^{j\omega})$: پاسخ فرکانسی

$$(z_0)^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)\Big|_{z = z_0} (z_0)^n$$

$(z_0)^n$: تابع ویژه

$H(z)\Big|_{z = z_0}$: مقدار ویژه

واژه‌نامه:

System function	تابع سیستم
Transfer function	تابع انتقال
Frequency response	پاسخ فرکانسی

43

فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل Z
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی تبدیل Z
- ☑ وارون تبدیل Z
- ☑ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه از نمودار قطب-صفر
- ☑ ویژگی‌های تبدیل Z
- ☐ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی Z
- ☐ نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
- ☐ تبدیل Z یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

مثال:

وارون تبدیل z عبارت زیر را به دست آورید.

$$X(z) = \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$$

$$\Rightarrow a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - a z^{-1}} \qquad ROC: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow n a^n u[n] \stackrel{z}{\longleftrightarrow} -z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - a z^{-1}}\right) = \frac{-z(-a z^{-2})}{(1 - a z^{-1})^2} = \frac{a z^{-1}}{(1 - a z^{-1})^2}$$

$$\Rightarrow x[n] = n (a)^n u[n]$$

45

بررسی ویژگی علی بودن:

✓ شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم زمان گسسته‌ی LTI آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم آن دست راستی بوده و بی‌نهایت را در بر گیرد.

✓ شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم زمان گسسته‌ی LTI با تابع سیستم ***rational*** آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم آن دست راستی بوده و درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بزرگ‌تر نباشد (وقتی بر حسب z نوشته می‌شود).

44

بررسی ویژگی پایداری:

✓ شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم زمان گسسته‌ی LTI آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم شامل دایره‌ی واحد باشد.

✓ اگر سیستم علی باشد شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که تمام قطب‌های تابع سیستم درون دایره‌ی واحد باشند.

45

مثال:

تابع سیستم یک سیستم LTI داده شده است. پاسخ ضربه‌ی سیستم را چنان بیابید که:

الف: سیستم پایدار باشد.

ب: سیستم علی باشد.

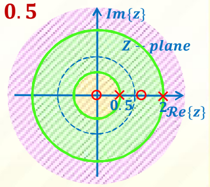
ج: سیستم ضدعلی باشد.

$$H(z)=\frac{2\,z^2-2.5\,z}{z^2-2.5\,z+1}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{2z(z-1.25)}{(z-2)\,(z-0.5)}$$

$zeros:\ \ z=0\ \&\ z=1.25 \qquad poles:\ \ z=2\ \&\ z=0.5$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{2-2.5\,z^{-1}}{1-2.5\,z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2-2.5\,z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-0.5\,z^{-1})}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$



$for\ \ ROC: 0.5<|z|<2 \Rightarrow h[n]=(0.5)^n\,u[n]-(2)^n u[-n-1]$

$for\ \ ROC: |z|>2 \Rightarrow h[n]=(0.5)^n\,u[n]+(2)^n u[n]$

$for\ \ ROC: |z|<0.5 \Rightarrow h[n]=-(0.5)^n\,u[-n-1]-(2)^n u[-n-1]$

51

مثال:

رابطه‌ی ورودی- خروجی سیستمی داده شده است. پاسخ ضربه‌ی سیستم را چنان بیابید که:

الف: سیستم پایدار باشد.

ب: سیستم علی باشد.

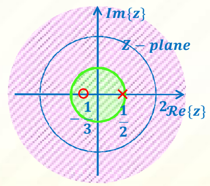
ج: سیستم ضدعلی باشد.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{3}\,x[n-1]$$

$$\Rightarrow Y(z)\left\{1-\frac{1}{2}z^{-1}\right\}=X(z)\,\left\{1+\frac{1}{3}z^{-1}\right\}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{z+\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}} \qquad zero:\ \ z=-\frac{1}{3} \qquad pole:\ \ z=\frac{1}{2}$$



الف و ب:

$for\ \ ROC: |z|>\frac{1}{2} \Rightarrow h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$

ج:

$for\ \ ROC: |z|<\frac{1}{2} \Rightarrow h[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$

52