تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
(سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

Presented by: Dr. Maleki   Spring 2012   http://sun.semnan.ac.ir/~maleki

---

به‌نام یگانه ایزد بی‌همتا

مبحث ششم:

تبدیل لاپلاس

2

فهرست مطالب:

3

معرفی تبدیل لاپلاس

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st} ds$$

در مقایسه با تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z را می‌توان به سیستم‌های ناپایدار نیز اعمال نمود.
از این رو، نقش مهمی در بررسی پایداری یا ناپایداری سیستم‌ها دارند.

واژه‌نامه:

Unilateral Laplace Transform	تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
Bilateral Laplace Transform	تبدیل لاپلاس دوطرفه

از آنجا که $s = \sigma + j\omega$ است آیا می‌توان گفت تبدیل فوریه حالت خاصی از تبدیل لاپلاس است؟

$$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s = j\omega \;\; or \;\; \sigma = 0}$$

4

مثال:

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زیر را به دست آورید. در هر مورد، محل قطب‌ها و صفرها و ناحیه‌ی همگرایی در صفحه s را مشخص نمایید.

الف: $\delta(t)$

ب: $u(t)$

ج: $e^{-\alpha t}u(t)$

د: $-e^{-\alpha t}u(-t)$

هـ: $cos(\omega_0 t)$

و: $sin(\omega_0 t)$

حل الف:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt = 1$$

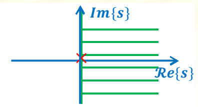
5

حل ب:

$$\mathcal{L}\Big\{u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty}e^{-st}dt = \frac{-e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$\mathcal{R}e\{s\} > 0$

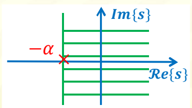
$$\Rightarrow u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad ROC:\ \ \mathcal{R}e\{s\} > 0$$



حل ج:

$$\mathcal{L}\Big\{e^{-\alpha t}u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha t}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty}e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$= -\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad ROC:\ \ \mathcal{R}e\{s+\alpha\} > 0 \ \ or\ \ \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$$



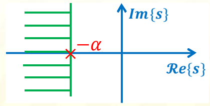
6

حل د:

$$\mathcal{L}\Big\{-e^{-\alpha t}u(-t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-\alpha t}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0}-e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$= \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad ROC:\ \ \mathcal{R}e\{s+\alpha\} < 0 \ \ or\ \ \mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$$

$$\Rightarrow -e^{-\alpha t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha} \qquad ROC:\ \ \mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$$



7

حل ه:

$$\mathcal{L}\Big\{cos\omega_0\, u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}cos\omega_0\, u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty}cos\omega_0\, e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-st}dt$$

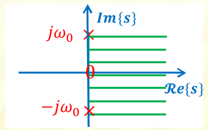
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(s-j\omega_0)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(s+j\omega_0)t}dt$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{-(s-j\omega_0)t}}{s-j\omega_0}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{-(s+j\omega_0)t}}{s+j\omega_0}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s+j\omega_0+s-j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$\mathcal{R}e\{s\} > 0$ $\qquad$ $\mathcal{R}e\{s\} > 0$

$$\Rightarrow cos\omega_0\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad ROC:\ \ \mathcal{R}e\{s\} > 0$$



8

حل و:

$$\mathcal{L}\Big\{\sin\omega_0\, u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\omega_0\, u(t) e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \sin\omega_0\, e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})e^{-st}dt$$

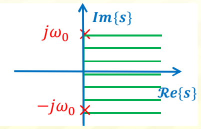
$$= \frac{1}{2j}\int_0^{+\infty} e^{-(s-j\omega_0)t}dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s+j\omega_0)t}dt$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{s-j\omega_0}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{-e^{-(s+j\omega_0)t}}{s+j\omega_0}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2j}\cdot\frac{s+j\omega_0-(s-j\omega_0)}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

$\mathcal{Re}\{s\} > 0$ $\quad$ $\mathcal{Re}\{s\} > 0$

$$\Rightarrow \sin\omega_0\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad ROC:\ \mathcal{Re}\{s\} > 0$$



مثال:

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زیر را به دست آورید. محل قطب‌ها و صفرها و ناحیه‌ی همگرایی در صفحه s را نیز مشخص نمایید.

الف) $x(t) = -2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$

ب) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos 3t\, u(t)$

حل الف:

$$\mathcal{L}\Big\{-2e^{-t}\,u(t) + 3e^{-2t}\,u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)\Big)e^{-st}dt$$

$$= -2\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-st}dt + 3\int_0^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}dt$$

$$= -2\int_0^{+\infty} e^{-(s+1)t}dt + 3\int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt$$

$$-2\cdot\frac{-e^{-(s+1)t}}{s+1}\Bigg|_0^{\infty} + 3\cdot\frac{-e^{-(s+2)t}}{s+2}\Bigg|_0^{\infty} = -2\cdot\frac{1}{s+1} + 3\cdot\frac{1}{s+2}$$

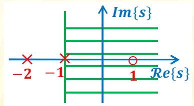
$\mathcal{Re}\{s+1\} > 0$ $\quad$ $\mathcal{Re}\{s+2\} > 0$

$\mathcal{Re}\{s\} > -1$ $\quad$ $\mathcal{Re}\{s\} > -2$

$$= \frac{-2(s+2)+3(s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow -2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\mathcal{Re}\{s\} > -1$$



حل ب:

$$\mathcal{L}\Big\{e^{-2t}\,u(t) + e^{-t}\cos 3t\, u(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos 3t\, u(t))e^{-st}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(e^{j3t} + e^{-j3t})e^{-(s+1)t}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s+1-3j)t}dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(s+1+3j)t}dt$$

$$= \frac{-e^{-(s+2)t}}{s+2}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{-(s+1-3j)t}}{s+1-3j}\Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-e^{-(s+1+3j)t}}{s+1+3j}\Bigg|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1-3j} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1+3j}$$

$\mathcal{Re}\{s\} > -2$ $\quad$ $\mathcal{Re}\{s\} > -1$

$$= \frac{(s+1+3j)(s+1-3j) + (s+1)(s+2)}{(s+2)(s+1-3j)(s+1+3j)}$$

$$= \frac{(s+1)^2 + 9 + s^2 + s + 2}{(s+2)(s+1-3j)(s+1+3j)} = \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s+1-3j)(s+1+3j)}$$

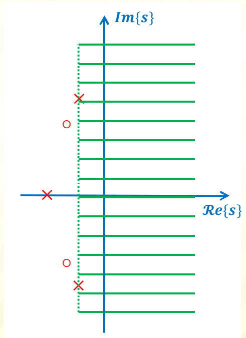
فهرست مطالب:

$poles: \quad p_1 = -2 \quad , \quad p_2 = -1 + 3j \quad , \quad p_3 = -1 - 3j$

$$zeros: \quad z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-96}}{4} = \frac{-5 \pm j\sqrt{71}}{4} = -\frac{5}{4} \pm j\frac{\sqrt{71}}{4}$$

یک صفر هم در بی‌نهایت داریم زیرا

$$\lim_{s \to \infty} X(s) \longrightarrow 0$$



مثال:

برای کدام یک از موارد دو مثال قبل می‌توان تبدیل فوریه نوشت؟

از آنجا که $X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$ بنابراین اگر $X(s)$ در $s = j\omega$ همگرا شود یا به عبارت دیگر، محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی $X(s)$ باشد می‌توان برای سیگنال، تبدیل فوریه نوشت.

الف) $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1 \qquad ROC: entire \;\; s-plane$ — می‌توان نوشت:

ب) $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \qquad ROC: \mathcal{R}e\{s\} > 0$ — نمی‌توان نوشت:

ج) $e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+\alpha}, \qquad ROC: \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$ — برای $\alpha > 0$ می‌توان نوشت:

د) $-e^{-\alpha t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s+\alpha}, ROC: \mathcal{R}e\{s\} < -\alpha$ — برای $\alpha < 0$ می‌توان نوشت:

هـ) $cos\omega_0 u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \qquad ROC: \mathcal{R}e\{s\} > 0$ — نمی‌توان نوشت:

و) $sin\omega_0 u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}, \qquad ROC: \mathcal{R}e\{s\} > 0$ — نمی‌توان نوشت:

الف) $-2e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \; ROC: \mathcal{R}e\{s\} > -1$ — می‌توان نوشت:

ب) $e^{-2t}u(t) + e^{-t}cos3t\,u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2s^2+5s+2}{(s+2)(s+1-3j)(s+1+3j)} ROC: \mathcal{R}e\{s\} > -1$ — می‌توان نوشت:

ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی

۱- ROC نوارهایی موازی محور $j\omega$ است.

۲-برای توابع کسری $(Rational)$، ناحیه‌ی همگرایی شامل قطب‌ها نیست.

۳-اگر $x(t)$ در یک فاصله‌ی زمانی محدود مقدار داشته باشد و انتگرال پذیر مطلق باشد ROC آن شامل کل صفحه s خواهد بود.

۴-اگر سیگنال دست راستی باشد ROC آن نیز دست راستی خواهد بود. یعنی چنانچه $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$ در ROC باشد تمام مقادیر s با $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_0$ نیز درون ناحیه‌ی همگرایی خواهند بود.

۵-اگر سیگنال دست چپی باشد ROC آن نیز دست چپی خواهد بود یعنی چنانچه $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0$ در ROC باشد تمام مقادیر s با $\mathcal{R}e\{s\} < \sigma_0$ نیز درون ناحیه‌ی همگرایی خواهند بود.

فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل لاپلاس
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- ☐ وارون تبدیل لاپلاس
- ☐ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب-صفر
- ☐ ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- ☐ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس
- ☐ تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

مثال:

برای سیگنال $x(t)$ داده شده:

$$x(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & 0<t<T \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

الف: تبدیل لاپلاس و ناحیه‌ی همگرایی آن را تعیین کنید.

ب: آیا ROC به دست آمده با محل قطب ها و صفرهای X(s) مطابقت دارد؟

حل الف:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{T} e^{-\alpha t}\, e^{-st}dt=\int_{0}^{T} e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$=\left.\frac{-e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha}\right|_{0}^{T}=\frac{1-e^{-(s+\alpha)T}}{s+\alpha} \qquad ROC: entire\ s-plane$$

حل ب: $X(s)$ ظاهرا قطبی در $s=-\alpha$ دارد ولی چون در این نقطه صفری هم دارد حذف قطب-صفر رخ داده و ناحیه‌ی همگرایی کل صفحه‌ی s می شود.

مثال:

برای سیگنال $x(t)$ داده شده:

$$x(t)=e^{-b|t|} \qquad b>0$$

الف: ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس سیگنال را حدس بزنید.

ب: تبدیل لاپلاس و ناحیه‌ی همگرایی آن را به دست آورید.

حل الف: چون سیگنال دو طرفه است انتظار داریم ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس آن نوار محدودی باشد.

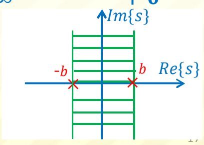
حل ب:

$$\mathcal{L}\{e^{-b|t|}\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b|t|}\, e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{bt}\, e^{-st}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-bt}\, e^{-st}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-b)t}dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-(s+b)t}dt=\left.\frac{-e^{-(s-b)t}}{s-b}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{-e^{-(s+b)t}}{s+b}\right|_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{-1}{s-b}+\frac{1}{s+b}=\frac{-2b}{s^2-b^2} \qquad -b<\mathcal{Re}\{s\}<b$$

$\mathcal{Re}\{s\}<$ b $\qquad \mathcal{Re}\{s\}>-$b



وارون تبدیل لاپلاس

می خواهیم با استفاده از رابطه‌ی تبدیل لاپلاس و زوج تبدیل فوریه، رابطه وارون تبدیل لاپلاس را به دست آوریم.

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow x(t)e^{-\sigma t}\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}X(\sigma+j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma+j\omega)\, e^{\sigma t}\, e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d(\sigma+j\omega)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

برای محاسبه وارون تبدیل لاپلاس یک عبارت، اغلب ترجیح می‌دهیم به جای استفاده از رابطه‌ی انتگرالی وارون تبدیل لاپلاس، از تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پایه و ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی تبدیل لاپلاس استفاده کنیم.

مثال:

وارون تبدیل لاپلاس $X(s)$ را برای هر یک از ROC های زیر تعیین نمایید.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

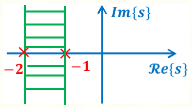
الف: $-2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1$

ب: $\mathcal{R}e\{s\} > -1$

ج: $\mathcal{R}e\{s\} < -2$

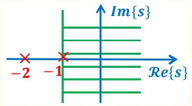
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

حل الف:



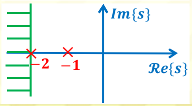
$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

حل ب:



$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

حل ج:



$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$

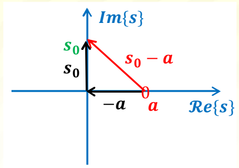
فهرست مطالب:

ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب–صفر

- معرفی بردار صفر
- معرفی بردار قطب
- ارزیابی هندسی تبدیل فوریه
- مثال

معرفی بردار صفر

$X(s)$ دارای صفری در $s = a$ است. $X(s) = s - a$



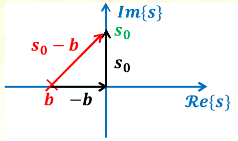
$$X(s)\Big|_{s=s_0} = s_0 - a$$

$\Rightarrow |X(s_0)| =$ طول بردار صفر

$\measuredangle X(s_0) =$ زاویه‌ی بردار صفر

معرفی بردار قطب

$X(s)$ دارای قطبی در $s = b$ است. $X(s) = \frac{1}{s-b}$



$$X(s)\Big|_{s=s_0} = \frac{1}{s_0 - b}$$

$\Rightarrow |X(s_0)| = \frac{1}{\text{طول بردار قطب}}$

$\measuredangle X(s_0) = -($زاویه‌ی بردار قطب$)$

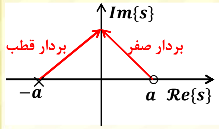
ارزیابی هندسی تبدیل‌فوریه به کمک نمودار قطب-صفر

$$X(s)\Big|_{s=j\omega}$$

$\Rightarrow |X(j\omega)| = \frac{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای صفر}}{\text{حاصل‌ضرب طول بردارهای قطب}}$

$\measuredangle X(j\omega) =$ (مجموع زاویه‌ی بردارهای صفر) − (مجموع زاویه‌ی بردارهای قطب)

مثال:

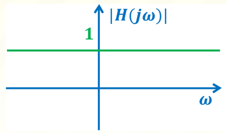


نمودار قطب–صفر تابع انتقال یک سیستم تمام‌گذر داده شده است.

الف: اندازه و فاز تبدیل فوریه‌ی آن را رسم کنید.

ب: چرا این فیلتر را تمام‌گذر گویند؟

$|H(j\omega)| = \frac{\text{طول بردار صفر}}{\text{طول بردار قطب}} = 1$



$\measuredangle H(j\omega) = ($زاویه‌ی بردار صفر$) - ($زاویه‌ی بردار قطب$)$

$for\ \ \omega = 0^+, \measuredangle H(j\omega) = (\pi - \varepsilon) - (\varepsilon) \cong \pi$

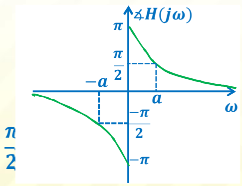
$for\ \ \omega = a\ \ , \measuredangle H(j\omega) = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

$for\ \ \omega \to +\infty, \measuredangle H(j\omega) = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 0$

$for\ \ \omega = 0^-, \measuredangle H(j\omega) = (-\pi + \varepsilon) - (-\varepsilon) \cong -\pi$

$for\ \ \omega = -a, \measuredangle H(j\omega) = \left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$for\ \ \omega \to -\infty, \measuredangle H(j\omega) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$



فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل لاپلاس
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- ☑ وارون تبدیل لاپلاس
- ☑ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب-صفر
- ☐ ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- ☐ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس
- ☐ تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

ویژگی‌های تبدیل لاپلاس

- ویژگی خطی بودن
- ویژگی جابجایی زمانی
- ویژگی جابجایی در حوزه s
- ویژگی مقیاس زمانی
- ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن
- ویژگی کانولوشن
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه زمان
- ویژگی مشتق‌گیری در حوزه مختلط
- ویژگی انتگرال‌گیری در حوزه زمان
- قضیه‌ی مقدار اولیه و قضیه‌ی مقدار نهایی

26

ویژگی خطی بودن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \qquad ROC : \mathcal{R}_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \qquad ROC : \mathcal{R}_2$$

$$\Rightarrow \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \alpha X_1(s) + \beta X_2(s)$$

$$ROC : \text{containing } \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$$

27

مثال:

تبدیل لاپلاس $x(t)$ را بیابید.

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1$$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{s+2-1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$$

$$ROC : \mathcal{R}e\{s\} > -2$$

این مثال نشان می‌دهد که ناحیه‌ی همگرایی ترکیب خطی در عبارت می‌تواند گسترش یابد.

28

ویژگی جابجایی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \qquad \text{ROC}: \mathcal{R}$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-t_0 s}X(s) \qquad \text{ROC}: \mathcal{R}$$

29

ویژگی جابجایی در حوزه‌ی s

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

$$e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0)$$

ROC به اندازه‌ی $Re\{s_0\}$ جابجا می‌شود.

30

ویژگی مقیاس زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$$

بسته به مقدار a، ناحیه‌ی همگرایی می‌تواند فشرده شود یا گسترش یابد و/یا نسبت به محور $j\omega$ قرینه گردد.

$$Time\ reversal: \qquad x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(-s)$$

ناحیه‌ی همگرایی نسبت به محور $Im\{s\}$ قرینه می‌گردد.

31

ویژگی مزدوج و تقارن‌های آن

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow \quad x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

اگر $x(t)$ حقیقی باشد قطب‌ها و صفحه‌های $X(s)$ یا حقیقی‌اند یا جفت‌های مزدوج مختلط.

به عبارت دیگر، برای $x(t)$ حقیقی، نمودار قطب-صفر $X(s)$ نسبت به محور $\mathcal{R}e\{s\}$ متقارن است.

32

اگر $x(t)$ دارای تقارن زوج باشد آنگاه $X(s)$ نیز دارای تقارن زوج و ناحیه‌ی همگرایی دوطرفه خواهد بود.

$$x(t) = x(-t) \quad \Rightarrow X(s) = X(-s)$$

اگر $x(t)$ دارای تقارن فرد باشد آنگاه $X(s)$ نیز دارای تقارن فرد و ناحیه‌ی همگرایی دوطرفه خواهد بود.

$$x(t) = x(-t) \quad \Rightarrow X(s) = -X(-s)$$

اگر $x(t)$ دارای تقارن زوج یا فرد باشد نمودار قطب–صفر $X(s)$ نسبت به محور $Im\{s\}$ متقارن خواهد بود.

ویژگی کانولوشن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \qquad ROC : \mathcal{R}_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \qquad ROC : \mathcal{R}_2$$

$$\Rightarrow x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \cdot X_2(s) \qquad ROC : containing\ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$$

مثال:

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های $x_1(t)$, $x_2(t)$ داده شده است. تبدیل لاپلاس $x_1(t) * x_2(t)$ را به دست آورید.

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -1$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s).X_2(s) = \frac{s+1}{s+2} . \frac{s+2}{s+1} = 1$$

$$ROC: entire\ s - plane$$

مشتق‌گیری در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \qquad ROC : \mathcal{R}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) \qquad ROC : containing\ \mathcal{R}$$

مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

$$-t\,x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{ds}X(s) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

مثال:

تبدیل لاپلاس سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t) = te^{-\alpha t}u(t)$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+\alpha} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$$

براساس ویژگی مشتق‌گیری در حوزه‌ی s داریم:

$$-te^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{-1}{(s+\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow te^{-\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^2} \qquad ROC: \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$$

مثال:

نشان دهید:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+\alpha)^n} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$$

مثال:

وارون تبدیل لاپلاس $X(s)$ داده شده را به دست آورید.

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$X(s) = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$A = (s+1)^2X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2s^2+5s+5}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$B = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2X(s)\right\}\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left\{\frac{2s^2+5s+5}{s+2}\right\}\Big|_{s=-1}$$

$$= \frac{(4s+5)(s+2)-(2s^2+5s+5)}{(s+2)^2} = -1$$

$$C = (s+2)X(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2}\Big|_{s=-2} = 3$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \quad \Rightarrow x(t) = 2te^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل لاپلاس
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- ☑ وارون تبدیل لاپلاس
- ☑ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب-صفر
- ☑ ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- ☐ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس
- ☐ تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad ROC: \mathcal{R}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s) \qquad ROC:\ containing\ \mathcal{R} \cap [\mathcal{R}e\{s\} > 0]$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t)$$

$$u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s)\,, \qquad ROC:\ containing\ \mathcal{R} \cap [\mathcal{R}e\{s\} > 0]$$

41

قضیه‌ی مقدار اولیه و قضیه‌ی مقدار نهایی

اگر $t < 0$ for $x(t) = 0$ و $x(t)$ فاقد ضربه‌واحد و مشتق‌های آن در t=0 باشد آنگاه:

$$Initial\ value\ theorem: \quad x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$Final\ value\ theorem: \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

42

بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$H(s)$: $system\ Function\ or\ Transfer\ Function$

$H(j\omega)$: $Frequency\ response$

واژه‌نامه:

System function	تابع سیستم
Transfer function	تابع انتقال
Frequency response	پاسخ فرکانسی

43

بررسی ویژگی علی- ضدعلی بودن:

✓ شرط لازم برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست راستی باشد.

✓ برای سیستمی با تابع سیستم ***rational***، شرط لازم و کافی برای علی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست راستی باشد.

به طور مشابه:

✓ شرط لازم برای ضدعلی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست چپی باشد.

✓ برای سیستمی با تابع سیستم ***rational***، شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن سیستم آن است که ناحیه‌ی همگرایی تابع سیستم دست چپی باشد.

مثال: $H_1(s)=\frac{1}{s+1}$ $(rational)$ $\mathcal{R}\{s\}>-1 \Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$ علی است

$H_2(s)=\frac{e^{s}}{s+1}$ $(irrational)$ $\mathcal{R}\{s\}>-1 \Rightarrow h(t)=e^{-t}u(t)$ غیرعلی است

44

بررسی ویژگی پایداری:

✓ شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که ROC تابع سیستم شامل محور $j\omega$ باشد.

✓ اگر سیستم علی باشد شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم آن است که تمام قطب‌های تابع سیستم در سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

45

مثال:

یک سیستم LTI با تابع سیستم زیر در نظر بگیرید.پاسخ ضربه‌ی سیستم را چنان تعیین کنید که سیستم:

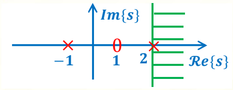
الف: علی باشد.

ب:پایدار باشد.

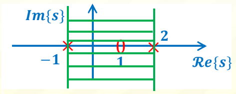
ج:ضدعلی باشد.

$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

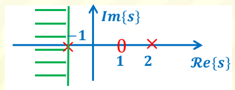
$$H(s)=\frac{2/3}{s+1}+\frac{1/3}{s-2}$$



حل الف: $h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$



حل ب: $h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$



حل ج: $h(t)=-\frac{2}{3}e^{-t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$

46

مثال:

اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI داده شده است. تابع سیستم را برای این سیستم به دست آورید.

۱- سیستم علی است.

۲- تابع سیستم $rational$ است و دارای دو قطب در $s=-2$ و $s=4$ می‌باشد.

۳- برای $x(t)=1$ داریم: $y(t)=0$.

۴- مقدار پاسخ ضربه در $t=0^{+}$ برابر است با 4.

47

فهرست مطالب:

تبدیل لاپلاس یک‌طرفه

$$X(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

- حد پایین انتگرال 0^- قرار داده شده است تا ضربه و مشتق‌های آن را در t=0 در انتگرال‌گیری لحاظ گردد.
- تبدیل لاپلاس یک‌طرفه برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های توصیف شده با معادله‌دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با شرایط اولیه‌ی غیر صفر (فاقد سکون اولیه) کاربرد دارد.

چنانچه مقدار سیگنال برای t<0 برابر صفر باشد تبدیل لاپلاس یک‌طرفه و دوطرفه یکسان خواهد بود.

مثال:

تبدیل لاپلاس یک‌طرفه و تبدیل لاپلاس دوطرفه‌ی سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = e^{-\alpha(t+1)}\, u(t+1)$$

مثال:

اگر تبدیل لاپلاس یک‌طرفه‌ی $x(t)$ برابر $X(s)$ باشد تبدیل لاپلاس $\frac{d}{dt}x(t)$ را بیابید.

فهرست مطالب:

- ☑ معرفی تبدیل لاپلاس
- ☑ ویژگی‌های ناحیه‌ی همگرایی
- ☑ وارون تبدیل لاپلاس
- ☑ ارزیابی هندسی تبدیل فوریه به کمک نمودار قطب-صفر
- ☑ ویژگی‌های تبدیل لاپلاس
- ☑ بررسی ویژگی‌های سیستم در حوزه‌ی لاپلاس
- ☑ تبدیل لاپلاس یک‌طرفه
- ☐ مثال‌ها

$$x(t) \xleftrightarrow{ULT} X(s)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{ULT} sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \xleftrightarrow{ULT} s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

51

مثال ها

53

مثال:

سیستم توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)\,, \qquad x(t) = \alpha u(t)$$

الف: با فرض سکون اولیه برای سیستم و با استفاده از تبدیل لاپلاس دوطرفه، پاسخ سیستم را به دست آورید.

ب: با فرض شرایط اولیه زیر برای سیستم، پاسخ سیستم را به دست آورید.

$$y(0^-) = \beta \qquad , \qquad y'(0^-) = \gamma$$

52

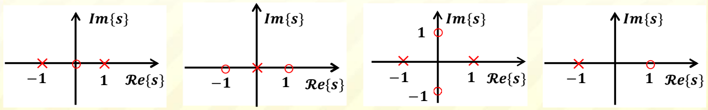
مثال(تمرین ۴-۹ کتاب):

الف: اگر $x(t)$ تابع زوجی از زمان باشد به نحوی که $x(t) = x(-t)$، نشان دهید که $X(s)=X(-s)$.

ب: اگر $x(t)$ تابع فردی از زمان باشد به نحوی که $X(t)=-x(-t)$ ، نشان دهید که $X(s)=-X(-s)$.

ج: تعیین کنید که آیا هیچ یک از نمودارهای قطب-صفر شکل زیر می‌تواند مربوط به تابع زوجی از زمان باشد؟ کدام یک؟ برای آن‌ها که می‌توانند ROC لازم را تعیین کنید.

د: تعیین کنید آیا هیچ یک از نمودارهای قطب-صفر شکل زیر می‌تواند مربوط به تابع فردی از زمان باشد؟ کدام یک؟ برای آن‌ها که می‌توانند ROC لازم را تعیین کنید.



مثال(تمرین ۴۵-۹):

یک سیستم LTI با اطلاعات زیر در نظر بگیرید.

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}$$

$$x(t) = 0 \quad t > 0$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

الف: $H(s)$ و ناحیه‌ی همگرایی آن را بیابید.

ب: $h(t)$ را بیابید.

ج: اگر ورودی $x(t)$ به صورت زیر باشد با استفاده از $H(s)$ تعیین شده در قسمت الف، خروجی $y(t)$ را بیابید.

$$x(t) = e^{3t} \quad -\infty < t < +\infty$$

مثال(آزمون کارشناسی ارشد ۸۹):

معادله دیفرانسیل یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان‌پیوسته به صورت $y'' - y' - 2y = x$ داده شده است. این سیستم نمی تواند .... باشد.

۱- ناپایدار و غیرعلی

۲-ناپایدار و علی

۳- پایدار و علی

۴- پایدار و غیرعلی

از توجه شما سپاسگزارم