تجزیه و تحلیل سیستم ها
(سیگنال ها و سیستم ها)

Presented by: Dr. Maleki   Spring 2012   http://sun.semnan.ac.ir/~maleki

---

به نام یگانه ایزد بی همتا

مبحث چهارم:

تبدیل فوریه‌ی زمان پیوسته

2

فهرست مطالب

- معرفی تبدیل فوریه
- ویژگی‌های تبدیل فوریه
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته
- تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت
- اهمیت تبدیل فوریه درتجزیه وتحلیل سیستم‌ها
- مثال‌های کاربردی

3

معرفی تبدیل فوریه

زوج تبدیل فوریه:

معادله آنالیز: $$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

معادله سنتز: $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

4

شرط های *Dirihlet* برای همگرایی تبدیل فوریه:

۱- سیگنال انتگرال‌پذیر مطلق باشد. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

۲- درهردوره‌ی محدود، تعداد نقاط اکسترمم محدود باشد.

۳- درهردوره‌ی محدود، تعداد نقاط ناپیوستگی محدود باشد.

با این حال، درادامه‌ی این فصل، با استفاده از تابع ضربه واحد و طرح تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته، برای سیگنال‌هایی که شرط اول را برآورده نمی‌سازند نیز تبدیل فوریه تعمیم یافته به دست می‌آوریم.

واژه نامه

انتگرال پذیرمطلق:	*absolutely integrable*
انتگرال پذیرمربع:	*square integrable*

5

براساس شرط اول ازشرط های Dirichlet تبدیل فوریه راتنها می توان برای تحلیل سیستم های LTI پایدار استفاده نمود.برای سیستم های LTI ناپایدار ازفرم عمومی ترتبدیل یعنی تبدیل لاپلاس استفاده می کنیم.

6

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x^\wedge(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

اگرشرط‌های *Dirichlet* برقرارباشند $\frac{1}{2}X^\wedge(t)$ برای tها برابر $X(t)$ خواهد بود مگر برای نقاط ناپیوستگی که $X^\wedge(t)$ برابرمیانگین مقادیر $X(t)$ در طرفین نقطه ناپیوستگی است.

شرط های *Dirichlet* شرط کافی هستند

7

مثال:

تبدیل فوریه سیگنالهای زیررابه دست آورید.

الف: $x(t) = \delta(t)$

ب: $x(t) = u(t)$

ج: $x(t) = e^{-\alpha t}\, u(t) \quad , \quad \alpha > 0$

د: $x(t) = e^{-\alpha|t|} \quad , \quad \alpha > 0$

ه: $x(t) = \Pi(t), \quad \alpha > 0$

حل بندالف: $F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

حل بند ب: سیگنال انتگرال پذیرمطلق نیست بنابراین شرط اول ازشرط های *Dirichiet* رابرآورده نمی سازد از این رو تبدیل فوریه ندارد.

8

حل بند ج:

$$F\{e^{-\alpha t}\,u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\,u(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega+\alpha)t}\,dt = \frac{-1}{j\omega+\alpha}\,e^{-(j\omega+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

حل بند د:

$$F\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\,e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega+\alpha)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{j\omega+\alpha}\,e^{-(j\omega+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty} + \frac{1}{\alpha-j\omega}\,e^{(\alpha-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

9

$$\frac{1}{\alpha+j\omega} + \frac{1}{\alpha-j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

حل بند و:

$$F\{\Pi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{-1}{j\omega}\,e^{-j\omega t}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-1}{j\omega}\left(e^{\frac{-j\omega}{2}} - e^{\frac{+j\omega}{2}}\right) = \frac{1}{\omega/2}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sin c\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

10

مثال:

تبدیل فوریه سیگنال زیررا به دست آورده و نتیجه راتحلیل کنید.

$$X(t) = \delta(t-t_0)$$

$$F\{\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-j\omega t_0}\,dt$$

$$= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = e^{-j\omega t_0}$$

11

مثال:

تبدیل فوریه سیگنالی به صورت زیرداده شده است سیگنال راتعیین نمایید.

$$X(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi jt}\,e^{j\omega t}\Big|_{\omega=-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi jt}\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right) = \frac{1}{\pi t}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi t}\sin\pi t = sinc(t)$$

12

جمع بندی مثال:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$e^{-\alpha t}\,u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^{2+}\omega^{2}}$$

$$\Pi(t) \longleftrightarrow sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\sin c(t) \longleftrightarrow \Pi\left(\frac{w}{2\pi}\right)$$

پیشنهادمی گردد این موارد را به خاطر بسپارید

فهرست مطالب

ویژگی های تبدیل فوریه

ویژگی خطی بودن	$(Linearity)$
ویژگی جابجایی زمانی	$(Time\ shift)$
ویژگی مزدوج و تقارن های آن	$(conjugation\ and\ conjugate\ symmetry)$
ویژگی مشتق گیری و انتگرال گیری	$(Differention\ and\ integration)$
ویژگی مقیاس زمان وفر کانس	$(time\ and\ frequency\ scaling)$
ویژگی دوگانی	$(duality)$
رابطه پارسوال	$(parseval's\ relation)$
ویژگی کانولوشن	$(convolution)$
ویژگی ضرب یامدولاسیون	$Modulation - Multiplication)$

ویژگی خطی بودن:

$$x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega), \quad x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega) \rightarrow \alpha x_1(t)+\beta x_2(t) \xleftrightarrow{F} \alpha\, X_1(j\omega)+\beta X_2(j\omega)$$

$$F\{\alpha\, x_1(t)+\beta\, x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha\, x_1(t)+\beta\, x_2(t)] e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)\, e^{-j\omega t}$$

$$= \alpha\, X_1(j\omega) + \beta\, X_2(j\omega)$$

ویژگی جابجایی با زمان:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \;\Rightarrow\; x(t-t_\circ) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_\circ} X(j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow\; x(t-t_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_\circ)}\, d\omega$$

$$\Rightarrow\; x(t-t_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t_\circ}\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow\; x(t-t_\circ) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t_\circ}\, X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow\; F\{x(t-t_\circ)\} = e^{-j\omega t_\circ} X(j\omega)$$

16

مثال:

تبدیل فوریه سیگنال زیررا به دست آورید.

$$x(t) = 2\, e^{-2t}\, u(t) + 3\, e^{-3t}\, u(t)$$

$$e^{-2t}\, u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$e^{-3t}\, u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega + 3}$$

$$\Rightarrow\; X(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} + \frac{3}{j\omega + 3}$$

17

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\measuredangle X(j\omega)}$$

$$F\{x(t-t_\circ)\} = e^{-j\omega t_\circ} X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j[\measuredangle X(j\omega) - t_\circ \omega]}$$

وقتی جابجایی زمانی به سیگنال اعمال می شوداندازه ی تبدیل
فوریه ی آن تغییری نمی کند و تنها فاز آن یک جابجایی خطی
پیدا می کند.

17

ویژگی مزدوج:

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \;\Rightarrow\; x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-j\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow\; x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$$

با تغییر متغیر $\omega = -\Omega$ داریم:

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} X^*(-j\Omega)\, e^{j\Omega t}(-d\Omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-j\Omega)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(-j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Rightarrow\; F\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$$

18

تقارن‌های مزدوج: با فرض $F\{x(t)\} = X(j\omega)$

$$if \quad x(t): real \;\Rightarrow\; \begin{cases} Re\{X(j\omega)\}: Even \\ Im\{X(j\omega)\}: Odd \end{cases} \;\&\; \begin{cases} |X(j\omega)|: Even \\ \angle X(j\omega): Odd \end{cases}$$

$$if \;\; x(t): real \,\&\, even \;\Rightarrow\; X(j\omega): real \,\&\, even$$

$$if \;\; x(t): real \,\&\, odd \;\Rightarrow\; X(j\omega): purely\ imaginary \,\&\, odd$$

$$if \quad x(t): real \;\Rightarrow\; X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow\; Re\{X(j\omega)\} - j\,Im\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\} + jIm\{X(-j\omega)\}$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\} \\ -Im\{X(j\omega)\} = Im\{X(-j\omega)\} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} Re\{X(j\omega)\}: Even \\ Im\{X(j\omega)\}: Odd \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; |X(j\omega)|\, e^{-j\angle X(j\omega)} = |X(-j\omega)|\, e^{j\angle X(-j\omega)}$$

$$\Rightarrow\; \begin{cases} |X(j\omega)| = |X(-j\omega)| \\ -\angle X(j\omega) = \angle X(-j\omega) \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |X(j\omega)|: Even \\ \angle X(j\omega): Odd \end{cases}$$

بنابراین هنگام محاسبه یا نمایش تبدیل فوریه ی یک سیگنال حقیقی، تنها لازم است دامنه-فاز یا بخش حقیقی-بخش موهومی را برای فرکانس های مثبت تعیین نماییم.

$$if \quad x(t) =: real \,\&\, even \;\Rightarrow\; X(j\omega): real \,\&\, even$$

$$for \quad x(t): real \;\Rightarrow\; X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow\; \overbrace{X^*(j\omega) = X(j\omega)}^{X(j\omega)\,:\,real} \underbrace{= X(-j\omega)}_{X(j\omega)\,:\,Even}$$

$$if \quad x(t): real \,\&\, Odd \;\Rightarrow\; X(j\omega): purely\ imaginary \,\&\, Odd$$

$$for \quad x(t): real \;\Rightarrow\; X^*(j\omega) = X(-j\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = -X(j\omega)$$

$$\Rightarrow\; \overbrace{X^*(j\omega) = -X(j\omega)}^{X(j\omega):\,purely\ imaginary} \underbrace{= X(-j\omega)}_{X(j\omega):\,Odd}$$

$$\text{for} \quad x(t) : \text{real} \qquad \begin{cases} Even\{x(t)\} \longleftrightarrow Re\{X(j\omega)\} \\ Odd\{x(t)\} \longleftrightarrow j\,Im\{X(j\omega)\} \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & Even\{x(t)\} & + & Odd\{x(t)\} \\ \updownarrow F & & \updownarrow F & & \updownarrow F \\ X(j\omega) & = & Re\{X(j\omega)\} & + & j\,Im\{X(j\omega)\} \end{array}$$

مثال:

با استفاده از رابطه ی $e^{-\alpha t}\,u(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{j\omega+\alpha}$ و ویژگی تقارن مزدوج ، تبدیل فوریه $x(t) = e^{-\alpha|t|}$ را بدست آورید.

$$e^{-\alpha|t|} = e^{-\alpha t}\,u(t) + e^{\alpha t}\,u(-t) = 2\,Even\{e^{-\alpha t}\,u(t)\}$$

$$Even\{e^{-\alpha t}\,u(t)\} \xleftrightarrow{F} Re\{\frac{1}{j\omega+\alpha}\}$$

$$\Rightarrow \quad F\{e^{-\alpha|t|}\} = 2Re\left\{\frac{1}{j\omega+\alpha}\right\} = 2Re\left\{\frac{-j\omega+\alpha}{(j\omega+\alpha)(-j\omega+\alpha)}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

ویژگی مشتق گیری و انتگرال گیری:

$$x(t) = X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} (j\omega)\,X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$synthesis\ equation: \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (j\omega)\,X(j\omega)\,e^{j\omega t}d\omega$$

مثال:

با انتگرال گیری $\delta(t)$ در حوزه ی زمان ، تبدیل فوریه ی (تعمیم‌یافته) پله واحد $u(t)$ را بدست آورید. آیا با مشتق گیری از $u(t)$ می توانید به همان مقدار قبلی برای تبدیل فوریه $\delta(t)$ دست یابید؟

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right\} = 1$$

ویژگی مقیاس زمان- فرکانس:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \Rightarrow x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad ; a : real$$

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}}\, d\tau & a > 0 \\ \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{-j\omega\frac{\tau}{a}}\, d\tau & a < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

اگر سیگنال در حوزه ی زمان گسترش یابد در حوزه ی فرکانس فشرده می شود.

27

در حالت خاص برای $a = -1$ داریم :

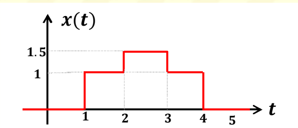
$$x(-\tau) \longleftrightarrow X(-j\omega)$$

اگر سیگنال در حوزه ی زمان قرینه شود تبدیل فوریه ی آن نیز در حوزه ی فرکانس قرینه می گردد.

28

مثال:

تبدیل فوریه ی سیگنال زیر را به دست آورید.



$$x(t) = \Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) + 0.5\,\Pi\,(t-2.5)$$

$$\Pi\,(t) \xleftrightarrow{F} Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

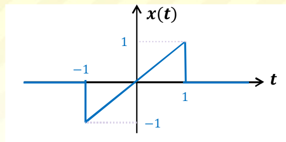
$$\Pi\,(t-2.5) \xleftrightarrow{F} e^{-j\,2.5\omega}\, Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad \Rightarrow \quad \Pi\left(\frac{t}{3}\right) \longleftrightarrow 3Sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t-2.5}{3}\right) \xleftrightarrow{F} 3\, e^{-j\,2.5\omega}\, Sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F\{x(t)\} = e^{-j\,2.5\omega}\left\{3\, Sinc\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) + 0.5\, Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right\}$$

مثال:

تبدیل فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



$$x(t) = t\,\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Pi\,(t) \xleftrightarrow{F} Sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\, Sinc\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$-jt\,\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \xleftrightarrow{F} 2\,\frac{d}{d\omega}\left\{Sinc\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right\}$$

$$t\,\Pi\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow 2j\,\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{sin\omega}{\omega}\right\} = 2j\,\frac{\omega\, cos\omega - sin\omega}{\omega^2}$$

$$= \frac{2}{j\omega}\left\{-cos\omega + sinc\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}\left\{-Cos\omega + sinc\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\right\}$$

30

ویژگی دوگانی :

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \quad \Longrightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, x(-\omega)$$

برای این ویژگی به جای $X(j\omega)$ از نماد $X(\omega)$ استفاده کردیم
تا فرمول‌بندی روابط ساده‌تر شود.

$$\textit{Analysis Equation}: \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\textit{synthesis Equation}: \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad 2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad 2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$$

$$\Longrightarrow \quad X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, x(-j\omega)$$

31

مثال:

با استفاده از ویژگی دوگانی و رابطه ی $\Pi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} sinc(\frac{\omega}{2\pi})$ تبدیل فوریه‌ی $sinc(t)$ را بیابید.

$$\Pi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} sinc(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$\Rightarrow \; sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\Pi(-\omega) = 2\pi\Pi(\omega)$$

$$\Rightarrow \; sinc\,(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi(\frac{\omega}{2\pi})$$

32

مثال:

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های زیر را بیابید.

الف : $x_1(t) = \dfrac{1}{jt + a}$

ب : $x_2(t) = \dfrac{2}{1 + t^2}$

حل الف:

$$e^{-at}\, u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega + a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{jt + a} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, e^{a\omega}\, u(-\omega)$$

حل ب:

$$e^{-\alpha|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha}{a^2 + t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, e^{-\alpha|-\omega|} = 2\pi\, e^{-\alpha|\omega|}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 + t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, e^{-|\omega|}$$

33

مثال:

باتوجه به ویژگی دوگانی انتظار داریم روابطی مشابه با آنچه برای مشتق، انتگرال و جابجایی در حوزه زمان مطرح شد در حوزه فرکانس هم برقرار باشد. این روابط را به دست آورید.

$$\textit{Analysis Equation}: \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow (-jt)x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}\, X(j\omega)$$

به طور مشابه با انتگرال‌گیری در حوزه‌ی زمان داریم:

$$\frac{1}{-jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\, d\eta$$

$$\textit{Analysis Equation}: \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\Rightarrow X\big(j(\omega - \omega_0)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt \Rightarrow e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega - \omega_0))$$

34

رابطه پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, G^*(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega\ dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, G^*(j\omega)e^{-j\omega t}\ dt\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G^*(j\omega)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega$$

35

حالت خاص رابطه پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

برای هر سیگنال $z(t)$، کمیت $E = \int_a^b |z(t)|^2 dt$ انرژی z(t) در فاصله‌ی زمانی a<t<b خوانده می شود. ریشه‌ی این نامگذاری آن است که اگر z(t) جریان یک مقاومت یک اهم باشد E انرژی تلف شده در مقاومت در فاصله زمانی a≤t≤b است.

36

مثال:

حاصل انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2 dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]^2 d\omega$$

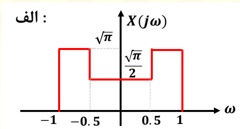
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\omega$$

$$= 1$$

37

مثال:

تبدیل فوریه‌ی سیگنالی داده شده است. برای این سیگنال، عبارت‌های $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ و $D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$ را تعیین نمایید.



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi}{4} + \pi\right\} = \frac{5}{8}$$

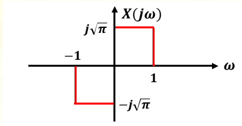
$$D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(j\omega)}_{odd}\ \underbrace{X(j\omega)}_{even}d\omega = 0$$

38

مثال:

تبدیل فوریه‌ی سیگنالی داده شده است. برای این سیگنال، عبارت‌های $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ و $D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}$ را تعیین نمایید.



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi\, d\omega = 1$$

$$D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(j\omega)}_{odd}\ \underbrace{X(j\omega)}_{even} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{1} (j\omega)\,(j\sqrt{\pi}) d\omega$$
$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\times\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

ویژگی کانولوشن:

$$x(t) * h(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$F\{x(t) * h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * h(t)]\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\, e^{-j\omega t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ e^{-j\omega t} d\tau\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\ e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega(t-\tau)} dt\ d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, e^{-j\omega(t-\tau)} dt\ d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, H(j\omega) d\tau = H(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\right]$$
$$= X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t) \equiv x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

OR

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H_1(j\omega)H_2(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega)$$

مثال:

پاسخ فرکانسی سیستم مشتق‌گیر و سیستم تاخیر خالص را تعیین نمایید.

برای سیستم مشتق‌گیر: $y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \implies Y(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)$

$$\implies H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega$$

برای سیستم تاخیر خالص: $y(t) = x(t-t_0) \implies Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0}\, X(j\omega)$

$$\implies H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-j\omega t_0}$$

مثال:

ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستمی داده شده است.خروجی سیستم را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید.

$x(t) = e^{-at}\,u(t)\ , \qquad a > 0$

$h(t) = e^{-bt}\,u(t)\ , \qquad b > 0$

الف : $a \neq b$

ب : $a = b$

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}\ , \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + b} \ \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + a)(j\omega + b)}$$

حل الف: $a \neq b \Rightarrow \ Y(j\omega) = \dfrac{\frac{1}{b-a}}{j\omega + a} + \dfrac{\frac{1}{a-b}}{j\omega + b} \ = \dfrac{1}{b-a}\left\{\dfrac{1}{j\omega + a} - \dfrac{1}{j\omega + b}\right\}$

$$\Rightarrow \ y(t) = \frac{1}{b-a}\{e^{-at}\,u(t) - e^{-bt}\,u(t)\}$$

42

حل ب : $a = b \ \Rightarrow Y(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega + a)^2}$

$$e^{-at}\,u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega + a} \quad \Rightarrow (-jt)e^{-at}\,u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega + a}\right) = \frac{-j}{(j\omega + a)^2}$$

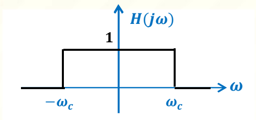
$$\Rightarrow te^{-at}\,u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(j\omega + a)^2} \qquad \Rightarrow \quad y(t) = te^{-at}\,u(t)$$

42

مثال:

پاسخ فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع ω_c را به ورودی $x(t)$ بیابید.

$x(t) = \dfrac{\omega_i}{\pi}\, sinc(\dfrac{\omega_i}{\pi} t)$

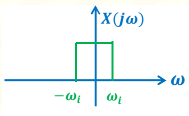


$$sinc(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Pi(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$\Rightarrow sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi} t\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{\omega_i}\Pi(\frac{\omega}{2\omega_i})$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_i}{\pi} sinc\left(\frac{\omega_i}{\pi} t\right) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Pi(\frac{\omega}{2\omega_i})$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)\cdot X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < min\{\omega_c, \omega_i\} \\ 0 & |\omega| < min\{\omega_c, \omega_i\} \end{cases}$$



$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_i}{\pi} sinc\left(\dfrac{\omega_i}{\pi} t\right) & \omega_i \leq \omega_c \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} sinc\left(\dfrac{\omega_c}{\pi} t\right) & \omega_i \geq \omega_c \end{cases}$$

43

ویژگی ضرب یا مدولاسیون:

$$x_s(t)\cdot x_c(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X_s(j\omega) * X_c(j\omega)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi} X_s(j\omega) * X_c(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi} X_s(j\omega) * X_c(j\omega)\right] e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} [X_s(j\omega) * X_c(j\omega)]\, e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\eta)\cdot X_c(j(\omega - \eta))\, d\eta \ \ e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\eta)\cdot X_c(j(\omega - \eta))\, e^{j\eta t}\, e^{j(\omega - \eta)t} d\omega\, d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_s(j\eta) e^{j\eta t}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - \eta))\, e^{j(\omega - \eta)t} d\omega\, d\eta$$

$$= x_s(t)\cdot x_c(t)$$

44

مثال:

تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.

$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi\, t^2}$$

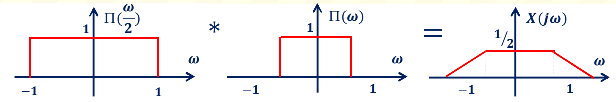
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{sint}{t}\cdot\frac{\sin(t/2)}{t/2} = \frac{1}{2\pi} sinc\left(\frac{t}{\pi}\right) sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$sinc(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \qquad sinc\left(\frac{t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\Pi(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} sinc\left(\frac{t}{\pi}\right) sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\pi\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) * 2\pi\,\Pi(\omega)\right]$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2}\,\Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) * \Pi(\omega)$$



45

فهرست مطالب

- ☑ معرفی تبدیل فوریه
- ☑ ویژگی‌های تبدیل فوریه
- ☐ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته
- ☐ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- ☐ سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت
- ☐ اهمیت تبدیل فوریه درتجزیه وتحلیل سیستم‌ها
- ☐ مثال‌های کاربردی

50

تبدیل فوریه تعمیم یافته

سیگنال‌های k، $u(t)$، $e^{-j\omega_0 t}$، $\cos\omega_0 t$ و $\sin\omega_0 t$ تبدیل فوریه‌ی معمولی ندارند زیرا انتگرال‌پذیر مطلق نیستند. ازآنجا که این سیگنال‌ها درمطالعه‌ی سیگنال‌ها و سیستم‌ها از اهمیت بسزایی برخوردارند از این رو، به دست‌آوردن تبدیل فوریه برای آنها می‌تواند بسیار سودمند باشد. با این هدف، تبدیل فوریه تعمیم یافته معرفی می‌گردد.

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

واژه‌نامه:

تبدیل فوریه تعمیم یافته	Generalized Fourier trasform

46

مثال:

تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف : $u(t)$

ب : $e^{j\omega_0 t}$

ج : $cos\omega_0 t$

د : $sin\omega_0 t$

حل الف : $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + 2\pi\delta(\omega)$$

حل ب : $1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

حل ج : $cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$

حل د : $sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\}$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\Rightarrow cos\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\{\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\}$$

$$\Rightarrow sin\omega_0 t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\pi\{\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\}$$

47

تبدیل فوریه تعمیم یافته‌ی سیگنال های متناوب

برای سیگنال متناوب x(t) با دوره تناوب T :

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

$$\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$

تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی یک سیگنال متناوب ، دنباله‌ای از ضربه‌ها خواهد بود.

برای دستیابی به تبدیل‌فوریه‌ی یک سیگنال متناوب ،لازم است ابتدا بسط سری فوریه‌ی نمایی سیگنال نوشته شود.

فهرست مطالب

فهرست مطالب

مثال:

سیستمی LTI باپاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ به دست آورید.

$$h(t)=e^{-t}u(t)$$

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

ازآنجا که ورودی تابع ویژه‌ی سیستم است.

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+1} \qquad \Rightarrow y(t)=\sum_{k=-3}^{3} a_k \frac{1}{j\omega+1}\Big|_{\omega=2k\pi} e^{jk2\pi t}$$

$$=\sum_{k=-3}^{3}\frac{a_k}{jk2\pi+1}e^{jk2\pi t}$$

برای حل این مثال، همچنین می‌توانستیم با محاسبه تبدیل فوریه h(t) وتبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی x(t) و سپس به‌کارگیری ویژگی کانولوشن ، به همین پاسخ برسیم.

سیستم‌های توصیف‌شده با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

تعیین پاسخ فرکانسی:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k\, Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k\, X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

50

مثال:

سیستم LTI پایداری را درنظربگیرید‌که با معادله دیفرانسیل خطی زیر توصیف شده است.

پاسخ‌ضربه و پاسخ‌فرکانسی سیستم را به دست آورید.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \qquad \alpha > 0$$

$$\Rightarrow j\omega\, Y(j\omega) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\omega)\{j\omega + a\} = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-at}u(t)$$

51

مثال:

سیستم LTI پایداری را درنظربگیرید‌که با معادله دیفرانسیل خطی زیر توصیف شده است.

الف: پاسخ فرکانسی وپاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست‌آورید.

ب: پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ تعیین نمایید.

حل الف:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)} = \frac{1/2}{j\omega + 3} + \frac{1/2}{j\omega + 1}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}u(t)$$

حل ب:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \qquad \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)} \cdot \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} = \frac{1/2}{(j\omega + 1)^2} + \frac{1/4}{j\omega + 1} + \frac{-1/4}{j\omega + 3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}te^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

52

فهرست مطالب

- ☑ معرفی تبدیل فوریه
- ☑ ویژگی‌های تبدیل فوریه
- ☑ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته
- ☑ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- ☑ سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت
- ❑ اهمیت تبدیل فوریه درتجزیه وتحلیل سیستم‌ها
- ❑ مثال‌های کاربردی

60

اهمیت تبدیل‌فوریه درتجزیه وتحلیل سیستم‌ها

۱-کانولوشن درحوزه‌ی زمان، درحوزه‌ی فرکانس به ضرب تبدیل می‌شود:

۲-معادله دیفرانسیل درحوزه‌ی زمان، درحوزه‌ی فرکانس به معادله جبری بدل می گردد:

مثالهای کاربردی

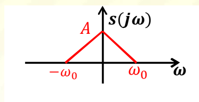
۱-مدولاسیون دامنه درسیستم های مخابراتی

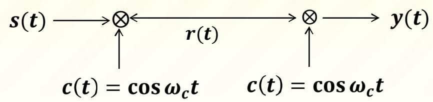
۲-پیاده سازی فیلترمیان‌گذر با فرکانس مرکزی قابل تنظیم

۳-نمونه برداری

مثال: مدولاسیون دامنه در سیستم‌های مخابراتی

برای سیستم نشان داده شده درشکل زیر و برای $s(j\omega)$ و$c(t)$داده شده، $R(j\omega), Y(j\omega)$ را به دست آورید.چگونه می‌توان از $y(t)$ ،ورودی را به دست آورد؟





$$c(t) = \cos\omega_c t \quad \Longrightarrow C(j\omega) = \pi\{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}S(j\omega) * C(j\omega) = \frac{1}{2\pi}S(j\omega) * \pi\{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{S(j(\omega+\omega_c)) + S(j(\omega-\omega_c))\}$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}R(j\omega) * C(j\omega)$$

$$= \frac{1}{4}\{S(j(\omega+\omega_c)) + S(j(\omega-\omega_c))\} * \{\delta(\omega+\omega_c) + \delta(\omega-\omega_c)\}$$

$$= \frac{1}{4}S(j(\omega+2\omega_c)) + \frac{1}{2}S(j\omega) + \frac{1}{4}S(j(\omega-2\omega_c))$$

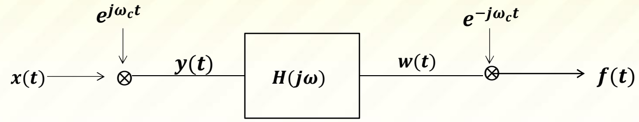
فهرست مطالب

برای بازیابی خروجی لازم است از فیلتر پایین‌گذری با بهره‌ی ۲ استفاده گردد.فرکانس قطع این فیلتر باید به نحوی انتخاب گردد که تنها $S(j\omega)$ از آن عبور کند.

$$\omega_0 < 2\pi f_H < 2\omega_c - \omega_0$$

مثال: پیاده‌سازی فیلتر میان‌گذر با فرکانس مرکزی قابل تنظیم

برای سیستم زیرو $X(j\omega)$داده شده، $Y(j\omega)$،$W(j\omega)$، $F(j\omega)$رابه دست آورید .آیا می توانید معادلی برای این سیستم بیابید؟



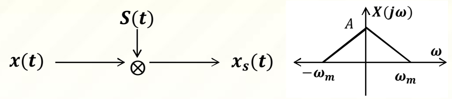
مثال: نمونه‌برداری

سیستمی با نمودار بلوکی شکل زیررادرنظربگیرید.

الف:$X(j\omega)$ و $S(t)$ داده شده، $X_s(j\omega)$ رابه دست آورید.

ب:طیف فرکانسی $X_s(j\omega)$رابه ازای $\omega_s = \omega_m$ ، $\omega_s = 2\omega_m$ ، $\omega_s = 4\omega_m$ رسم کنید.

ج:درچه شرایطی می‌توان ازسیگنال نمونه برداری شده، سیگنال اصلی را بازسازی نمود؟



حل الف:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad ; \quad T = \frac{1}{f_s} \quad , \omega_s = 2\pi f_s$$

ازآنجاکه$S(t)$متناوب است لازم است ابتدا بسط سری فوریه نمایی آن را بنویسیم.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\,e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow S(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \qquad \Rightarrow S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T}\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$\Rightarrow X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\; X(j\omega) * S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(j\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right))$$

حل به شیوه‌ی ترسیمی:

در حوزه‌ی فرکانس

در حوزه‌ی زمان

حل ب:

حل ج: برای بازسازی سیگنال اصلی از سیگنال نمونه‌برداری شده لازم است $\omega_s \geq 2\omega_m$ باشد.

جمع بندی مثال:

این مثال،اساس کارنمونه‌برداری رانشان می دهد.

قضیه نمونه برداری:برای این که بتوان سیگنال را از نمونه‌های آن بازسازی نمودلازم است نمونه برداری با نرخ بالاتراز دو برابر بالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال انجام شود.

نرخ نمونه برداری نایکوییست: دو برابر بالاترین مولفه فرکانسی سیگنال

درعمل: معمولا نمونه برداری با نرخ ۵ تا ۱۰برابربالاترین مولفه‌ی فرکانسی سیگنال انجام می گردد تا با وجود محدودیت غیرایده آل بودن فیلتر، سیگنال به درستی قابل بازسازی باشد.

همچنین برای پرهیز از اثرنویزهای بالابرطیف سیگنال،پیش از نمونه‌برداری، سیگنال را با فیلتر پایین گذر ضدتداخل بافرکانس قطع کوچک‌تر نصف فرکانس نمونه‌برداری فیلترمی‌کنند.

واژه نامه

قضیه نمونه برداری	Sampling theorem
نرخ نایکوییست	Nyquist rate
فیلترضدتداخل	Anti-aliasing filter

نکاتی در رابطه با ارتباط حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی فرکانس:

۱-مقدار متوسط سیگنال: $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$

۲-مقدار سیگنال در در زمان $t = 0$: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow 2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)d\omega$

۳-اگر $x(t)$ حقیقی باشد اندازه و فاز تبدیل فوریه‌ی آن به ترتیب دارای تقارن‌های زوج و فرد می‌باشند و بخش‌های حقیقی و موهومی آن نیز به ترتیب دارای تقارن‌های زوج و فرد هستند.

$$x(t): real \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |X(j\omega)| : even \quad \& \quad \angle X(j\omega) = odd \\ Re\{X(j\omega)\}: even \quad \& \quad Im\{X(j\omega)\} : odd \end{cases}$$

۴-

$$x(t): real \ \& \ even \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) : \ real \ \& \ even$$

$$x(t): real \ \& \ odd \quad \Rightarrow \quad X(j\omega) : \ purely\ imaginary \ \& \ odd$$

۵-

$$x(t): real \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Even\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\{X(j\omega)\} \ : even \\ Odd\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} jIm\{X(j\omega)\} : odd \end{cases}$$

۶-

$$x(t-t_\circ) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_\circ}X(j\omega)$$

به‌عبارت دیگر،جابه‌جایی‌درحوزه‌ی زمان موجب اضافه فازخطی‌درحوزه‌ی فرکانس می‌شود ولی اندازه تغییری نخواهدکرد.

۷-برای سیگنال‌های‌حقیقی:

-اگرسیگنال زوج باشد تبدیل فوریه‌ی‌آن‌حقیقی‌خواهدبود.

-اگرسیگنال زوج شیفت یافته باشد α یی وجوددارد که $e^{-j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد به عبارت دیگرتبدیل فوریه دارای فازخطی است.

۸-اگرسیگنال در فاصله محدودی از زمان مقدارداشته‌باشد تبدیل فوریه‌ی آن برای تمام فرکانس‌ها مقدارخواهدداشت و برعکس

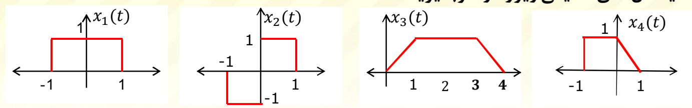
۹- اگرسیگنال درحوزه زمان فشرده شود تبدیل فوریه‌ی آن درحوزه‌ی فرکانس گسترده می‌شود و برعکس

۱۰-سیگنال انرژی درحوزه زمان و انرژی تبدیل فوریه‌ی آن توسط رابطه‌ی پارسوال به هم مربوط می شوند.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$$

مثال:

سیگنال های حقیقی زیررادرنظربگیرید.



الف: فاز تبدیل فوریه‌ی $x_3(t)$ رابیابید.

ب: تبدیل فوریه کدام یک ازاین سیگنال های حقیقی است؟

ج: تبدیل فوریه کدام یک ازاین سیگنال ها موهومی محض است؟

د: برای هرکدام ازاین سیگنال ها $X(j\omega)\big|_{\omega=0}$ چقدراست؟

ه:برای هرکدام ازاین سیگنال ها $\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,d\omega$ رابیابید.

و: $\mathcal{F}^{-1}[Real\{X_3(j\omega)\}]=?$

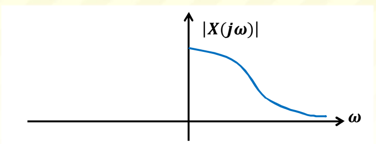
ز: $\mathcal{F}^{-1}[jIm\{X_1(j\omega)\}]=?$

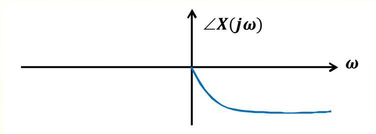
ح: $\mathcal{F}^{-1}[jIm\{X_2(j\omega)\}]=?$

ط: $\int_{-\infty}^{\infty}|X_1(j\omega)|^2d\omega=?$

ی: $\int_{-\infty}^{\infty}|X_3(j\omega)|^2d\omega=?$

ک: اگر بدانیم $x(t)$ حقیقی است نمودار اندازه و فاز $X(j\omega)$ را کامل کنید.





مثال:

برای سیگنال حقیقی $x(t)$ داریم: $\ln|X(j\omega)|=-|\omega|$

الف: سیگنال زوجی برای $x(t)$ بیابید.

ب:سیگنال فردی برای $x(t)$ بیابید.

مثال:

تبدیل فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه نمایید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$$

فهرست مطالب

- ☑ معرفی تبدیل فوریه
- ☑ ویژگی‌های تبدیل فوریه
- ☑ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته
- ☑ تبدیل فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی سیگنال‌های متناوب
- ☑ سیستم‌های توصیف شده با معادله دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت
- ☑ اهمیت تبدیل فوریه درتجزیه وتحلیل سیستم‌ها
- ☑ مثال‌های کاربردی

از توجه شما سپاسگزارم