تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
(سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

Presented by: Dr. Maleki fall 2012 http://sun.semnan.ac.ir/~maleki

به‌نام یگانه ایزد بی‌همتا

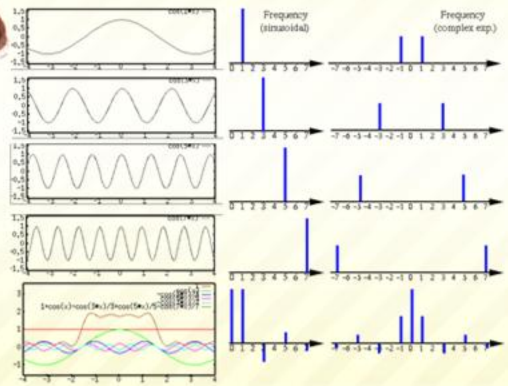
مبحث سوم:

سری فوریه‌ی نمایی

فهرست مطالب

مقدمه

- یادآوری سری فوریه‌ی مثلثاتی
- جایگاه سری فوریه‌ی نمایی در قیاس با سری فوریه‌ی مثلثاتی



فهرست مطالب

تعریف ضرب داخلی دو تابع :

ضرب داخلی دو تابع f(t) و g(t) در محدوده‌ی (a,b) به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$< f(t), g(t) > \triangleq \int_a^b f(t)\, g^*(t)\, dt$$

سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته

- تعریف ضرب داخلی دو تابع
- تعریف متعامد بودن دو تابع
- تعریف مجموعه توابع متعامد (و متعامد یکه)
- توصیف سیگنال به صورت ترکیب خطی اجزای مجموعه توابع متعامد
- تعیین نقش هر جزء در این توصیف
- سری فوریه‌ی تعمیم یافته
- مثال‌ها

تعریف متعامد بودن دو تابع :

دو تابع f(t) و g(t) را در فاصله‌ی (a,b) متعامد گوییم اگر

$$< f(t), g(t) >= 0$$
$$< f(t), f(t) > \neq 0$$
$$< g(t), g(t) > \neq 0$$

همچنین، دو تابع f(t) و g(t) را در فاصله‌ی (a,b) متعامد یکه گوییم اگر

$$< f(t), g(t) > = 0$$
$$< f(t), f(t) > = 1$$
$$< g(t), g(t) > = 1$$

واژه‌نامه:

توابع متعامد	orthogonal functions
توابع متعامد یکه	orthonormal functions

تعریف مجموعه توابع متعامد (و متعامد یکه):

مجموعه توابع $\{\varphi_k(t)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ را در فاصله (a,b) متعامد گوییم اگر برای هر دو عضو این مجموعه داشته باشیم:

$$< \varphi_n(t), \varphi_m(t) > = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ A \neq 0 & n = m \end{cases}$$

اگر A=1 باشد مجموعه توابع را متعامد یکه گوییم.

مجموعه توابع ممکن است در یک محدوده متعامد و در محدوده‌ی دیگر غیرمتعامد باشند.

9

توصیف سیگنال به صورت ترکیب خطی اجزای مجموعه توابع متعامد:

سیگنال x(t) را می‌توان به صورت ترکیب خطی از اجزای مجموعه توابع متعامد $\{\varphi_k(t)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ بازنمایی کرد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)$$

$$a_k = ?$$

10

تعیین نقش هر جزء در این توصیف:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)$$

$$a_k = ?$$

$$< x(t), \varphi_k(t) > = \int_a^b x(t)\, \varphi_k^*(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \varphi_m(t) \varphi_k^*(t) dt = \int_a^b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \varphi_m(t) \varphi_k^*(t) dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_a^b a_m \varphi_m(t) \varphi_k^*(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \int_a^b \varphi_m(t) \varphi_k^*(t) dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m < \varphi_m(t), \varphi_k(t) > = a_k < \varphi_k(t), \varphi_k(t) >$$

$$\Rightarrow < x(t), \varphi_k(t) > = a_k < \varphi_k(t), \varphi_k(t) >$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{< x(t), \varphi_k(t) >}{< \varphi_k(t), \varphi_k(t) >}$$

11

سری فوریه تعمیم یافته:

معادله سنتز
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi_k(t)$$

معادله آنالیز
$$a_k = \frac{< x(t), \varphi_k(t) >}{< \varphi_k(t), \varphi_k(t) >}$$

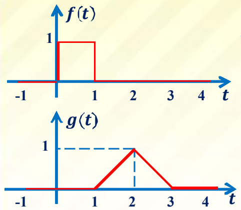
واژه‌نامه:

synthesis equation	معادله سنتز:
analysis equation	معادله آنالیز:

12

مثال:

آیا توابع f(t) و g(t) داده شده در محدوده‌ی (۱۰،۱۰-) متعامدند؟



$$< f(t), g(t) > = \int_{-10}^{10} f(t)\, g^*(t)\, dt = 0$$

$$< f(t), f(t) > = \int_{-10}^{10} f(t)\, f^*(t)\, dt = 1$$

$$< g(t), g(t) > = \int_{-10}^{10} g(t)\, g^*(t)\, dt = \int_{-10}^{10} |g(t)|^2\, dt = 2\int_{0}^{1} t^2\, dt$$

$$= \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

بنابراین f(t) و g(t) متعامدند.

13

مثال:

نشان دهید مجموعه توابع $\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ در محدوده (0,T) متعامد است.

$$< \varphi_n(t), \varphi_m(t) > = \int_0^T \varphi_n(t) \varphi_m^*(t)\, dt$$

$$= \int_0^T e^{jn\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \int_0^T e^{j(n-m)\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

$$if \quad n = m \quad ; < \varphi_n(t), \varphi_m(t) > = \int_0^T e^{j(n-n)\frac{2\pi}{T}t}\, dt = \int_0^T dt = T$$

$$if \quad n \neq m \quad ; < \varphi_n(t), \varphi_m(t) > = \frac{1}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)} e^{j(n-m)\frac{2\pi}{T}t} \Big|_0^T$$

$$= \frac{e^{j(n-m)\frac{2\pi}{T}T} - e^0}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)} = \frac{1-1}{j\frac{2\pi}{T}(n-m)} = 0$$

بنابراین مجموعه توابع $\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ در محدوده‌ی (0,T) متعامد است.

14

مثال:

اگر بخواهیم سیگنالی را به صورت ترکیب خطی از مجموعه توابع متعامد $\{e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ بازنمایی کنیم ضرایب سری فوریه را بیابید.

$$a_k = \frac{< x(t), \varphi_k(t) >}{< \varphi_k(t), \varphi_k(t) >} = \frac{< x(t), e^{jk\frac{2\pi}{T}t} >}{< e^{jk\frac{2\pi}{T}t}, e^{jk\frac{2\pi}{T}t} >}$$

$$= \frac{\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt}{\int_{<T>} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T} \int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

15

فهرست مطالب

- ☑ مقدمه
- ☑ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته
- ☐ سری فوریه نمایی زمان پیوسته
- ☐ طرح اهمیت نمایی مختلط درمطالعه‌ی سیستم‌های LTI
- ☐ شرط‌های همگرایی سری فوریه
- ☐ بررسی ارتباط سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی
- ☐ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته
- ☐ سری فوریه نمایی زمان گسسته

16

سری فوریه نمایی زمان پیوسته

برای سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T :

معادله سنتز : $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$

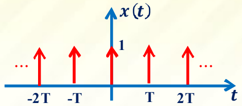
معادله آنالیز : $a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$

17

مثال:

بسط سری فوریه نمایی سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T}$$

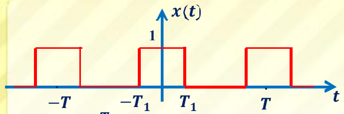
$$\Rightarrow x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

ضرایب سری فوریه‌ی قطار ضربه، مقادیر ثابت است.

18

مثال: سری فوریه‌ی نمایی موج قطار پنجره

سری فوریه‌ی نمایی سیگنال زیر را به دست آورید.



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$x(t) = x(t+T)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt \overset{for\ k \neq 0}{=} \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T}} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{jk2\pi}\left(e^{jk\frac{2\pi}{T}T_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{T}T_1}\right)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{jk\frac{2\pi}{T}T_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{T}T_1}\right) = \frac{1}{k\pi}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right)$$

$$= \frac{2T_1}{T}\cdot\frac{1}{k\frac{2\pi}{T}T_1}\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right) = \frac{2T_1}{T}\,sinc\left(k\frac{2T_1}{T}\right)$$

$a_0 = \frac{2T_1}{T}$ این حالت نیز در رابطه‌ی عمومی صدق می‌کند.

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2T_1}{T}\,sinc\left(\frac{2T_1}{T}k\right) e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

ضرایب سری فوریه قطار پنجره، sinc می‌باشد.

19

مثال:

ضرایب سری فوریه‌ی نمایی سیگنال زیر را به دست آورید.

$$x(t) = sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{T}t} - e^{-j\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

$$= \frac{1}{2j} e^{j(1)\frac{2\pi}{T}t} + \left(-\frac{1}{2j}\right) e^{j(-1)\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} \\ a_{-1} = -\frac{1}{2j} \\ a_k = 0\ for\ k \neq 1, -1 \end{cases}$$

20

مثال:

ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال زیر را بیابید.

$x(t) = 1 + sin\omega_0 t + 2cos\omega_0 t + cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{\boxed{1}}_{a_0} + \underbrace{\boxed{\left(1 + \frac{1}{2j}\right)}}_{a_1} e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\boxed{\left(1 - \frac{1}{2j}\right)}}_{a_{-1}} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}}_{a_2} e^{j2\omega_0 t} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}}_{a_{-2}} e^{-j2\omega_0 t}$$

21

فهرست مطالب

- ☑ مقدمه
- ☑ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته
- ☑ سری فوریه نمایی زمان پیوسته
- ☐ طرح اهمیت نمایی مختلط درمطالعه‌ی سیستم‌های LTI
- ☐ شرط‌های همگرایی سری فوریه
- ☐ بررسی ارتباط سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی
- ☐ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته
- ☐ سری فوریه نمایی زمان گسسته

22

اهمیت نمایی مختلط در مطالعه‌ی سیستم های LTI

با چه هدفی سراغ توصیف سیگنال متناوب توسط مجموعه توابع نمایی رفتیم؟

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega_0 \tau}d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0 \tau}d\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}H(j\omega)\Big|_{\omega = \omega_0} \end{aligned}$$

تعریف تبدیل فوریه‌ی زمان پیوسته:

$$H(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

23

$$\underbrace{x(t) = e^{j\omega_0 t}}_{\text{تابع ویژه:}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(j\omega) \end{matrix}} \longrightarrow y(t) = \underbrace{H(j\omega)\Big|_{\omega = \omega_0}}_{\text{مقدار ویژه:}} \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\text{تابع ویژه:}}$$

یعنی پاسخ یک سیستم به ورودی نمایی مختلط، همان نمایی مختلط است که تنها دامنه‌ی آن تغییر یافته است.

اگر پاسخ سیستم به یک ورودی برابر حاصل‌ضرب ورودی در یک مقدار ثابت باشد این ورودی، تابع ویژه‌ی سیستم و ضریب متناظر با آن، مقدار ویژه نامیده می‌شود.

تابع ویژه: $e^{j\omega_0 t}$

مقدار ویژه: $H(j\omega)\Big|_{\omega = \omega_0}$

واژه‌نامه:

تابع ویژه	eigen function
مقدار ویژه	eigen value

24

و لُب کلام اینکه:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(j\omega) \end{matrix}} \longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

در بسط سری فوریه نمایی، سیگنال را به صورت
ترکیب خطی از توابع نمایی مختلط می‌نویسیم که
نمایی مختلط، تابع ویژه‌ی سیستم می‌باشد.

25

در حالت کلی‌تر:

$$x(t)=e^{s_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \longrightarrow y(t)=?$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s_0 t}e^{-s_0\tau}d\tau \\ &= e^{s_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau \\ &= e^{s_0 t}\,H(s)\Big|_{s=s_0} \end{aligned}$$

تبدیل لاپلاس دو طرفه :

$$\mathcal{L}\{h(t)\}=H(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow\quad e^{s_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(s) \end{matrix}} \longrightarrow H(s)\Big|_{s=s_0} e^{s_0 t}$$

26

مثال:

تابع سیستم یک سیستم LTI داده شده است. پاسخ این سیستم به ورودی داده شده را تعیین نمایید.

$$H(s)=\frac{1}{s+2}$$

$$x(t)=20e^{2t}+30e^{3t}+7e^{5t}$$

$$y(t)=20\,H(s)|_{s=2}\,e^{2t}+30\,H(s)|_{s=3}\,e^{3t}+7\,H(s)|_{s=5}\,e^{5t}$$

$$\Rightarrow y(t)=5e^{2t}+6e^{3t}+e^{5t}$$

27

فهرست مطالب

- ☑ مقدمه
- ☑ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته
- ☑ سری فوریه نمایی زمان پیوسته
- ☑ طرح اهمیت نمایی مختلط درمطالعه‌ی سیستم‌های LTI
- ☐ شرط‌های همگرایی سری فوریه
- ☐ بررسی ارتباط سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی
- ☐ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته
- ☐ سری فوریه نمایی زمان گسسته

28

شرط‌های همگرایی سری فوریه

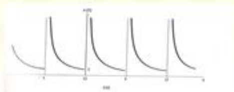
آیا برای هر سیگنال متناوبی می‌توان بسط سری فوریه نوشت؟

❖ تحت شرایطی ممکن است انتگرال $a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}dt$ واگرا شود (مقدار به دست آمده به ازای برخی a_k ها بی‌نهایت شود).

❖ ممکن است تمام ضرایب a_k محدود باشند ولی معادله سنتز $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ با این ضرایب، به سیگنال اصلی همگرا نشود.

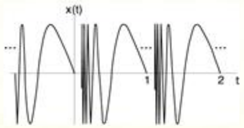
شرط‌های Dirichlet برای همگرایی سری فوریه:

۱– سیگنال در هر دوره‌ی تناوب، انتگرال‌پذیر مطلق باشد.



$$x(t) = \frac{1}{t} \quad 0 < t \le 1$$

۲– تعداد نقاط اکسترمم (ماکزیمم و مینیمم) در هر دوره‌ی تناوب محدود باشد.

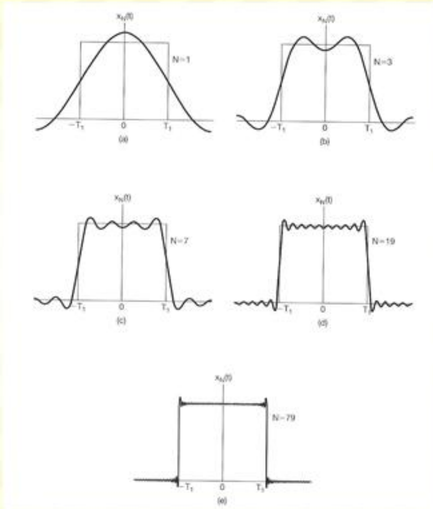


$$x(t) = \sin(2\pi / t)$$
$$0 < t \le 1$$

۳– تعداد نقاط ناپیوستگی در هر دوره‌ی تناوب محدود باشد؛ بعلاوه، مقدار این ناپیوستگی‌ها هم محدود باشد.

اگر شرایط Dirichlet برآورده شود سیگنال و سری فوریه‌ی آن جز در نقاط پرش (ناپیوستگی) با هم مساوی خواهند بود. در نقاط ناپیوستگی نیز، مقدار سری فوریه به میانگین مقادیر در طرفین ناپیوستگی همگرا می‌شود.

پدیده‌ی Gibbs:



فهرست مطالب

- ☑ مقدمه
- ☑ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته
- ☑ سری فوریه نمایی زمان پیوسته
- ☑ طرح اهمیت نمایی مختلط درمطالعه‌ی سیستم‌های LTI
- ☑ شرط‌های همگرایی سری فوریه
- ☐ بررسی ارتباط سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی
- ☐ سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته
- ☐ سری فوریه نمایی زمان گسسته

بررسی ارتباط سری فوریه مثلثاتی و سری فوریه نمایی

یادآوری روابط سری فوریه مثلثاتی :

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\omega_0 t) + \beta_n \sin(n\omega_0 t)]$$

$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{<T>} x(t)dt$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T}\int_{<T>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$\beta_n = \frac{2}{T}\int_{<T>} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\,[\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt - j\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\alpha_k - \frac{j}{2}\beta_k$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{2}\alpha_k - \frac{j}{2}\beta_k$$

$$a_{-k} = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{+jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)\,[\cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)]dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)Cosk\omega_0 t dt + \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)jSink\omega_0 t\, dt = \frac{1}{2}\alpha_k + \frac{j}{2}\beta_k$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k = a_k + a_{-k}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_k = j(a_k - a_{-k})$$

$a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - j\beta_k)$	$\alpha_k = a_k + a_{-k}$ $\beta_k = j(a_k - a_{-k})$

$a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - j\beta_k)$	$\alpha_k = a_k + a_{-k}$ $\beta_k = j(a_k - a_{-k})$

دانستن ارتباط ضرایب سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی، امکان استفاده از دانسته‌های قبلی (سری فوریه مثلثاتی) برای حوزه‌ی جدید (سری فوریه نمایی) را فراهم می‌سازد.

به عنوان مثال:

$$if\ x(t){:}even \Rightarrow \begin{cases}\alpha_k \neq 0 \\ \beta_k = 0\end{cases} \Rightarrow a_k{:}Real$$

$$if x(t){:}odd \Rightarrow \begin{cases}\alpha_k = 0 \\ \beta_k \neq 0\end{cases} \Rightarrow a_k{:}Purely\ imaginary$$

تمرین:

نشان دهید α_n برحسب n دارای تقارن زوج و β_n برحسب n دارای تقارن فرد است.

$a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - j\beta_k)$	$\alpha_k = a_k + a_{-k}$ $\beta_k = j(a_k - a_{-k})$

فهرست مطالب

سری فوریه‌ی تعمیم یافته‌ی زمان گسسته

- ضرب داخلی دو تابع
- تعامد دو تابع
- مجموعه توابع متعامد
- توصیف سیگنال به صورت ترکیب خطی اجزای مجموعه توابع متعامد
- نقش هر جزء در این توصیف
- سری فوریه‌ی تعمیم یافته
- مثال

تعریف ضرب داخلی دو تابع:

ضرب داخلی دو تابع $f[n]$ و $g[n]$ در محدوده‌ی $[N_1, N_2]$:

$$\langle f[n], g[n] \rangle \triangleq \sum_{n=N_1}^{N_2} f[n] g^*[n]$$

تعریف تعامد دو تابع:

دو تابع $f[n]$ و $g[n]$ را در محدوده‌ی $[N_1, N_2]$ متعامد گوییم اگر:

$$\langle f[n], g[n]\rangle = 0$$
$$\langle f[n], f[n]\rangle \neq 0$$
$$\langle g[n], g[n]\rangle \neq 0$$

تعریف مجموعه توابع متعامد:

مجموعه توابع $\{\phi_k[n]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ را در محدوده‌ی $[N_1, N_2]$ متعامد گوییم اگر:

$$\langle \phi_k[n], \phi_m[n]\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ A \neq 0 & k = m \end{cases}$$

مجموعه توابع $\{\phi_k[n]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ را در محدوده‌ی $[N_1, N_2]$ متعامد یکه گوییم اگر:

$$\langle \phi_k[n], \phi_m[n]\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases}$$

توصیف سیگنال به صورت ترکیب خطی اجزای مجموعه توابع متعامد:

هر سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره‌ی تناوب N را می‌توان به صورت ترکیب خطـی از اجـزای یک مجموعه توابع متعامد بازنمایی کرد:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n]$$

نقش هر جزء در این توصیف:

$$\langle x[n], \phi_k[n]\rangle = \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\phi_k^*[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} \left[\sum_{m=\langle N\rangle} a_m \phi_m[n]\right]\phi_k^*[n]$$
$$= \sum_{n=\langle N\rangle} \left[\sum_{m=\langle N\rangle} a_m \phi_m[n]\,\phi_k^*[n]\right] = \sum_{m=\langle N\rangle} \left[\sum_{n=\langle N\rangle} a_m \phi_m[n]\,\phi_k^*[n]\right]$$
$$= \sum_{m=\langle N\rangle} a_m \left[\sum_{n=\langle N\rangle} \phi_m[n]\,\phi_k^*[n]\right] = \sum_{m=\langle N\rangle} a_m \langle \phi_m[n], \phi_k[n]\rangle$$
$$= a_k \langle \phi_k[n], \phi_k[n]\rangle$$
$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{\langle x[n], \phi_k[n]\rangle}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n]\rangle}$$

سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته:

معادله سنتز : $x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n]$

معادله آنالیز : $a_k = \dfrac{\langle x[n], \phi_k[n]\rangle}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n]\rangle}$

مثال:

نشان دهید که مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$ تنها شامل N سیگنال متمایز است.

$$\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\phi_{mN+k}[n] = e^{j(mN+k)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jm2\pi n}e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \phi_k[n]$$

45

مثال:

نشان دهید مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$ در محدوده‌ای به طول N متعامد است.

$$< \phi_k|n|, \phi_m|n| > = < e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, e^{jm\frac{2\pi}{N}n} >$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\begin{cases} if \quad k = m \quad ; < \varphi_k[n], \varphi_m[n] > = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(0)\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \\ if \quad k \neq m \quad ; < \varphi_k[n], \varphi_m[n] > = \dfrac{1 - e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}N}}{1 - e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}}} = \dfrac{1 - 1}{1 - e^{j(k-m)\frac{2\pi}{N}}} = 0 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه توابع $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$ در محدوده‌ای به طول N متعامد است.

46

مثال:

اگر بخواهیم سیگنالی را به صورت ترکیب خطی از اعضای مجموعه توابع متعامد $\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\right\}$ بازنمایی کنیم نقش هر عضو (ضرایب سری فوریه) را بیابید.

$$a_k = \frac{\langle x[n], \phi_k[n]\rangle}{\langle \phi_k[n], \phi_k[n]\rangle} = \frac{\langle x[n], e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\rangle}{\langle e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\rangle} = \frac{1}{N}\langle x[n], e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\rangle$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تمرین:

نشان دهید که ضرایب سری فوریه‌ی a_k با دوره ی تناوب N متناوب‌اند.

47

فهرست مطالب

48

سری فوریه نمایی زمان–گسسته

برای سیگنال زمان–گسسته‌ی متناوب x[n] :

معادله سنتز : $x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

معادله آنالیز : $a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

تفاوت‌های سری فوریه نمایی زمان پیوسته و سری فوریه نمایی زمان گسسته:

یادآوری:

زوج سری فوریه‌ی نمایی زمان گسسته	زوج سری فوریه‌ی نمایی زمان پیوسته
$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$
$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$	$a_k=\frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt$

۱- در سری فوریه‌ی زمان گسسته، معادله‌ی سنتز تنها شامل N جمله است در حالی که معادله‌ی سنتز سری فوریه زمان پیوسته می‌تواند شامل بی‌نهایت جمله باشد.

به عبارت دیگر، نمایش سری فوریه زمان گسسته یک سری محدود است در حالی که نمایش سری فوریه زمان پیوسته یک سری نامحدود است.

۲- در سری فوریه‌ی زمان گسسته، ضرایب سری فوریه a_k با تناوب N متناوب می باشند.

واژه‌نامه:

سری محدود :	finite series
سری نامحدود :	infinite series

مثال:

ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال زیر را بیابید.

$x[n]=\sin(\Omega_0 n)$

نوشتن بسط سری فوریه منوط به متناوب بودن سیگنال است.

$\frac{2\pi}{\Omega_0}=?$

- $integer(N)$ — با دوره‌ی تناوب N متناوب است.
- $rational\left(\frac{N}{m}\right)$ — با دوره‌ی تناوب N متناوب است.
- $irrational$ — متناوب نیست.

در صورت متناوب بودن سیگنال،

$$x[n]=\sin(\Omega_0 n)=\frac{1}{2j}\left[e^{j\Omega_0 n}-e^{-j\Omega_0 n}\right]=\dots$$

مثال: بازنمایی به فرم سری فوریه‌ی نمایی

ضرایب سری فوریه نمایی a_k سیگنال‌های زیر را برای $k=1:N$ تعیین نمایید.

الف : $x[n]=\sin 3n$

ب : $x[n]=\sin\frac{2\pi}{5}n$

ج : $x[n]=\sin\frac{3(2\pi)}{5}n$

حل الف : $\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{3}: irrational$ سیگنال متناوب نیست و نمی‌توان آن را به فرم سری فوریه‌ی نمایی بازنمایی کرد.

حل ب : $\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\left(\frac{2\pi}{5}\right)}=5 \Rightarrow N=5$

$$\Rightarrow x[n]=\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{5}n}-e^{-j\frac{2\pi}{5}n}\right)$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{1}{2j}\ ;a_4=a_{-1}=\frac{-1}{2j}\ ;a_2=a_3=a_5=0$$

حل ج : $\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{2\pi}{\left(3\frac{2\pi}{5}\right)}=\frac{5}{3} \Rightarrow N=5$

$$\Rightarrow x[n]=\sin\left(3\frac{2\pi}{5}n\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{j3\frac{2\pi}{5}n}-e^{-j3\frac{2\pi}{5}n}\right)$$

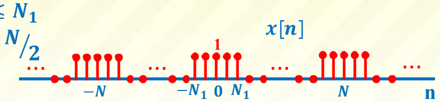
$$\Rightarrow a_3=\frac{1}{2j}\ ;a_2=a_{-3}=\frac{-1}{2j}\ ;a_1=a_4=a_5=0$$

مثال: سری فوریه‌ی نمایی زمان گسسته قطار پنجره

ضرایب سری فوریه نمایی سیگنال روبرو را به دست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & N_1 < |n| \le N/2 \end{cases}$$

$$x[n] = x[n+N]$$



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} 1.\ e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \overset{\text{for } k\neq 0}{=} \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}}}{e^{-\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}}}\cdot\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}} - e^{-\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}} - e^{-\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}}}$$

$$= \frac{1}{N}\cdot\frac{\frac{1}{2j}}{\frac{1}{2j}}\cdot\frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}} - e^{-\frac{1}{2}jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{2N_1+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

for $k=0$

$$a_0 = \frac{1}{N}\cdot(2N_1+1) = \frac{2N_1+1}{N}$$

آیا در اینجا نیز انتظار پدیده‌ای مشابه پدیده‌ی Gibbs را داریم؟

اهمیت نمایی مختلط در مطالعه‌ی سیستم‌های LTI زمان گسسته:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\Omega_0(n-k)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{j\Omega_0 n}e^{-j\Omega_0 k}$$

$$= e^{j\Omega_0 n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\Omega_0 k}$$

$$= e^{j\Omega_0 n}\, H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\Omega_0}$$

تعریف تبدیل فوریه‌ی زمان گسسته:

$$H(e^{j\Omega}) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(e^{j\Omega}) \end{matrix}} \longrightarrow y[n] = H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\Omega_0} e^{j\Omega_0 n}$$

تابع ویژه:

مقدار ویژه:

تابع ویژه:

یعنی پاسخ سیستم LTI به ورودی نمایی مختلط همان نمایی مختلط است که تنها دامنه‌ی آن تغییر یافته است.

بنابراین:

$$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(e^{j\Omega}) \end{matrix}} \longrightarrow \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}}\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

در حالت کلی‌تر:

$$x[n] = z_0^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

$$y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z_0^{\,n-k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z_0^n\, z_0^{-k}$$

$$= z_0^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z_0^{-k}$$

$$= z_0^n\, H(z)|_{z=z_0}$$

تعریف تبدیل Z دو طرفه :

$$Z\{h[n]\} = H(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

$$x[n] = z_0^n \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(e^{j\Omega}) \end{matrix}} \longrightarrow y[n] = H(z)|_{z=z_0}\ z_0^n$$

تابع ویژه:

مقدار ویژه:

تابع ویژه:

فهرست مطالب

- مقدمه
- سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان پیوسته
- سری فوریه نمایی زمان پیوسته
- طرح اهمیت نمایی مختلط درمطالعه‌ی سیستم‌های LTI
- شرط‌های همگرایی سری فوریه
- بررسی ارتباط سری فوریه نمایی و سری فوریه مثلثاتی
- سری فوریه تعمیم یافته‌ی زمان گسسته
- سری فوریه نمایی زمان گسسته

57

از توجه شما سپاسگزارم

58