# تجزیه و تحلیل سیستم‌ها
# (سیگنال‌ها و سیستم‌ها)

Presented by: Dr. Maleki    Fall 2012    http://sun.semnan.ac.ir/~maleki

---

به‌نام یگانه ایزد بی‌همتا

## مبحث دوم:

## تجزیه و تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه‌ی زمان

2

---

## فهرست مطالب



3

---

## فهرست مطالب

- جمع کانولوشن (برای سیستم‌های LTI زمان گسسته)

**عناوین این بخش:**

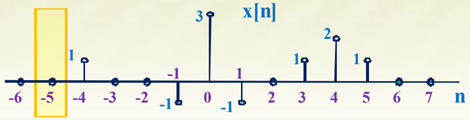
- توصیف سیگنال زمان-گسسته به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه
- تعیین پاسخ یک سیستم خطی با استفاده از پاسخ ضربه در محل‌های مختلف
- تعیین پاسخ یک سیستم LTI با استفاده از پاسخ ضربه
- جمع کانولوشن
- مثال‌ها

- نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
- مثال‌های مروری

4

## توصیف سیگنال زمان–گسسته به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه:

می‌خواهیم سیگنال x[n] را به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه بازنمایی کنیم.




$$x[n] = \cdots + (0)\delta[n+5] + (1)\delta[n+4] + (0)\delta[n+3] + (0)\delta[n+2] + (-1)\delta[n+1] + (3)\delta[n] + (-1)\delta[n-1] + (0)\delta[n-2] + (1)\delta[n-3] + (2)\delta[n-4] + (1)\delta[n-5] + (0)\delta[n-6] + \cdots$$

$$x[n] = \cdots + x[-5]\delta[n+5] + x[-4]\delta[n+4] + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3] + x[4]\delta[n-4] + x[5]\delta[n-5] + x[6]\delta[n-6] + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

بنابراین، هر سیگنال زمان–گسسته را می‌توان به صورت ترکیب خطی از ضربه واحد و جابجا شده‌های آن بازنمایی کرد.

5

## مثال: توصیف سیگنال به صورت ترکیب خطی از ضربه واحد و جابجا شده‌های آن

سیگنال‌های زیر را به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه‌ی واحد توصیف کنید.

الف: پله‌ی واحد

ب: شیب واحد

6

## تعیین پاسخ یک سیستم خطی با استفاده از پاسخ ضربه در محل‌های مختلف:

$\vdots$

$\delta[n+1] \Rightarrow h_{-1}[n]$ : فرض کنید $h_{-1}[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n+1]$ باشد.

$\delta[n] \Rightarrow h_0[n]$ : فرض کنید $h_0[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n]$ باشد.

$\delta[n-1] \Rightarrow h_1[n]$ : فرض کنید $h_1[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n-1]$ باشد.

$\delta[n-2] \Rightarrow h_2[n]$ : فرض کنید $h_2[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n-2]$ باشد.

$\vdots$

$\delta[n-k] \Rightarrow h_k[n]$ : فرض کنید $h_k[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n-k]$ باشد.

$\vdots$

در این صورت، با فرض خطی بودن سیستم داریم:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

بنابراین، اگر سیستم خطی باشد می‌توان با داشتن پاسخ سیستم به ضربه واحد و جابجایی یافته‌های آن، پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به دست آورد.

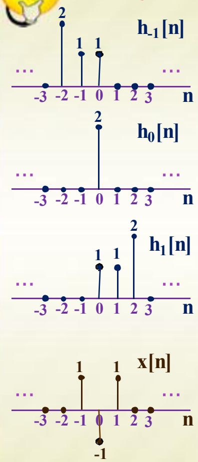
7

## مثال: یافتن پاسخ سیستم خطی با در اختیار داشتن پاسخ به ضربه‌ها:

فرض کنید $h_{-1}[n]$، $h_0[n]$ و $h_1[n]$ به ترتیب پاسخ‌های یک سیستم به خطی به $\delta[n+1]$، $\delta[n]$ و $\delta[n-1]$ باشند.

الف: پاسخ این سیستم را به ورودی x[n] به دست آورید.

ب: آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ توضیح دهید.




8

## تعیین پاسخ یک سیستم خطی مستقل از زمان (LTI) با استفاده از پاسخ ضربه:

برای سیستم‌های مستقل از زمان، پاسخ سیستم به شیفت یافته‌ی ضربه‌ی واحد برابر با شیفت یافته‌ی پاسخ سیستم به ضربه‌ی واحد می‌باشد، یعنی:

$h_k[n] = h_0[n-k]$

با فرض این که $h[n]$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta[n]$ باشد یعنی: $\delta[n] \Rightarrow h[n]$

$h_k[n] = h[n-k]$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

بنابراین، اگر سیستم خطی و مستقل از زمان (LTI) باشد می‌توان با داشتن پاسخ سیستم به ضربه واحد، پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را به دست آورد.



## جمع کانولوشن:

*for LTI systems*:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

در سیستم‌های LTI، پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را می‌توان با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست آورد.

### واژه‌نامه:

| | |
|---|---|
| جمع کانولوشن | Convolution Sum |



## مثال: کانولوشن

نشان دهید $u[n] * u[n] = (n+1)\,u[n] = (n+1)\,u[n+1] = r[n+1]$



## مثال: جمع کانولوشن

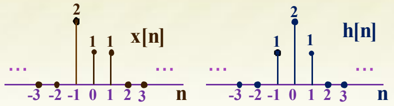
ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستمی LTI داده شده است. پاسخ سیستم را به دست آورید.

$x[n] = \alpha^n\, u[n]$

$h[n] = u[n]$

## مثال: جمع کانولوشن

ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستمی LTI داده شده است. پاسخ سیستم را به دست آورید.




13

## مثال: جمع کانولوشن

ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستمی LTI داده شده است. پاسخ سیستم را به دست آورید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & 0 \le n \le 6 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

14

## فهرست مطالب



15

## انتگرال کانولوشن:

مشابه سیستم‌های زمان گسسته، برای سیستم‌های زمان پیوسته داریم:

*for LTI systems*:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

در سیستم‌های LTI، پاسخ سیستم به هر ورودی دلخواه را می‌توان با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست آورد.

**واژه‌نامه:**

| | |
|---|---|
| انتگرال کانولوشن | convolution integral |

16

## مثال: انتگرال کانولوشن

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ به دست آورید.

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 20 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

17

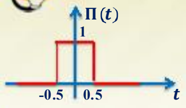
## مثال: کانولوشن

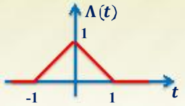
نشان دهید $u(t) * u(t) = t\, u(t) = r(t)$

18

## مثال: کانولوشن

نشان دهید $\Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$




19

## مثال: انتگرال کانولوشن

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ به دست آورید.

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

$$h(t) = 2\,u(t+1) - 4\,u(t-1) + 2\,u(t-3)$$

20

**مثال: انتگرال کانولوشن**

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ به دست آورید.

$h(t) = u(t)$

$x(t) = e^{-at}\, u(t)$



**مثال: انتگرال کانولوشن**

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی $h(t)$ توصیف شده است.

پاسخ این سیستم را به ورودی $x(t)$ به دست آورید.

$h(t) = u(t-3)$

$x(t) = e^{2t}\, u(-t)$

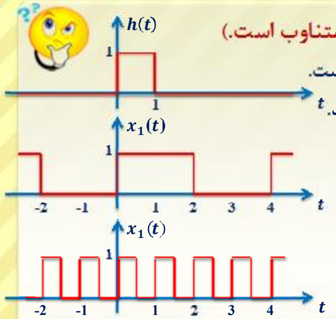


**مثال: انتگرال کانولوشن (یکی از سیگنال‌ها متناوب است.)**

سیستمی LTI با پاسخ ضربه‌ی h(t) مشخص شده است.

الف: پاسخ سیستم را به ورودی $x_1(t)$ به دست آورید.

ب: پاسخ سیستم را به ورودی $x_2(t)$ به دست آورید.

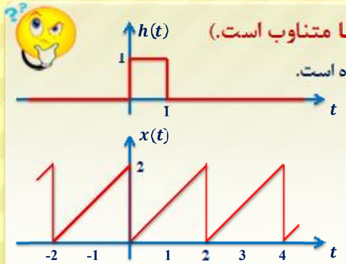





**مثال: انتگرال کانولوشن (یکی از سیگنال‌ها متناوب است.)**

ورودی و پاسخ ضربه‌ی یک سیستم LTI داده شده است.

پاسخ سیستم را به دست آورید.



## فهرست مطالب

- ☑ جمع کانولوشن (برای سیستم‌های LTI زمان گسسته)
- ☑ انتگرال کانولوشن (برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته)
- ❑ ویژگی‌های کانولوشن
- ❑ نکته‌های کانولوشن
- ❑ بررسی ویژگی‌های سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربه
- ❑ معرفی پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
- ❑ سیستم‌های توصیف شده با معادله‌ی دیفرانسیل (دیفرنس) خطی با ضرایب ثابت
- ❑ بررسی ویژگی‌های سیستم‌های توصیف شده با معادله‌ی دیفرانسیل (دیفرنس)...
- ❑ نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
- ❑ مثال‌های مروری

25

## ویژگی‌های کانولوشن:

جابجایی

$$y(t) * x(t) = x(t) * y(t)$$
$$y[n] * x[n] = x[n] * y[n]$$

شرکت‌پذیری

$$x(t) * (\, y(t) * z(t)\,) = (x(t) * y(t)) * z(t)$$
$$x[n] * (\, y[n] * z[n]\,) = (x[n] * y[n]) * z[n]$$

پخشی

$$x(t) * (\, h_1(t) + h_2(t)\,) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$
$$x[n] * (\, h_1[n] + h_2[n]\,) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

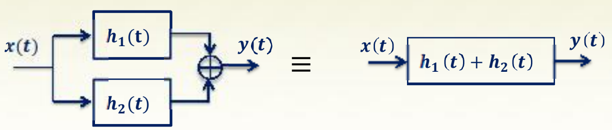
واژه‌نامه:

| | |
|---|---|
| Commutative Property | ویژگی جابجایی |
| Associative Property | ویژگی شرکت‌پذیری |
| Distributive Property | ویژگی پخشی (توزیع‌پذیری) |

26

## تعبیری برای ویژگی پخشی:

$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * (\, h_1(t) + h_2(t)\,)$$

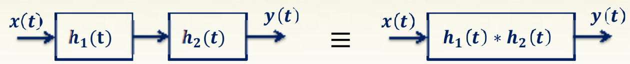



سیستم‌های موازی را می‌توان با یک سیستم
معادل جایگزین نمود که پاسخ ضربه‌ی آن برابر
مجموع پاسخ ضربه‌ی دو سیستم است.

27

## تعبیری برای ویژگی شرکت‌پذیری:

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (\, h_1[n] * h_2[n]\,)$$




سیستم‌های سری را می‌توان با یک سیستم
معادل جایگزین نمود که پاسخ ضربه‌ی آن برابر
کانولوشن پاسخ ضربه‌ی دو سیستم است.

28

### تعبیری برای ویژگی جابجایی:

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = x[n] * (h_2[n] * h_1[n])$$

$$x(t) \to \boxed{h_1(t)} \to \boxed{h_2(t)} \to y(t) \quad \equiv \quad x(t) \to \boxed{h_2(t)} \to \boxed{h_1(t)} \to y(t)$$

تغییر دادن ترتیب سیستم‌های LTI سری مجاز است.

29

### مثال: تغییر دادن ترتیب سیستم‌های سری

دو سیستم با رابطه‌ی ورودی- خروجی روبرو توصیف شده‌اند.

$system\ 1:\quad y(t) = 2\,x(t)$

$system\ 2:\quad y(t) = \{x(t)\}^2$

الف: پاسخ هر یک از فرم‌های اتصال سری دو سیستم را به دست آورید.

ب: بر این اساس، آیا تغییر ترتیب این دو سیستم مجاز است؟ چرا؟

$$x(t) \to \boxed{\begin{array}{c} System\ 1 \\ y(t) = 2\,x(t) \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c} System\ 2 \\ y(t) = [x(t)]^2 \end{array}} \to y_1(t)$$

$$x(t) \to \boxed{\begin{array}{c} System\ 2 \\ y(t) = [x(t)]^2 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c} System\ 2 \\ y(t) = 2\,x(t) \end{array}} \to y_2(t)$$

30

### مثال: ویژگی‌های کانولوشن

اتصال سیستم‌های LTI زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) \to \boxed{h_1[n]} \to \boxed{h_2[n]} \to y(t)$$

پاسخ سیستم به ورودی داده شده را به دست آورید.

$h_1[n] = sin(n) + cos(n)$

$h_2[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\,\delta[n-1]$

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

31

## فهرست مطالب



32

## نکته‌های کانولوشن:

اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد می‌توان نشان داد:

$$y(t-t_0)=x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)$$

اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد می‌توان نشان داد:

$$y(at)=|a|\,x(at)*h(at)$$

اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد می‌توان نشان داد:

$$y'(t)=x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)$$

اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد می‌توان نشان داد:

که $A_y$ نشانگر سطح زیر منحنی $y(t)$ است. $A_y=A_x\cdot A_h$

تعداد و محل نمونه‌های غیرصفر حاصل از کانولوشن دو سیگنال FIR:

$$for\ n<N_{i1}\ \&\ n>N_{F1}\,,\qquad x_1[n]=0$$

$$for\ n<N_{i2}\ \&\ n>N_{F2}\,,\qquad x_2[n]=0$$

$$\Rightarrow\ for\ n<N_{i1}+N_{i2}\ \&\ n>N_{F1}+N_{F2}\,,\qquad x_1[n]*x_2[n]=0$$

33

## مثال: نکته‌های کانولوشن

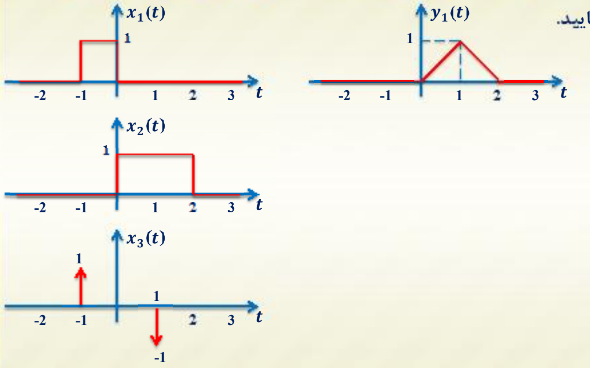
نشان دهید اگر دو سیگنال در هم کانوالو شوند سطح زیر منحنی سیگنال حاصل برابر حاصل‌ضرب سطح زیر منحنی دو سیگنال است.

$$y(t)=x(t)*h(t)\ \Rightarrow\ A_y=A_x\cdot A_h$$

34

## مثال: نکته‌های کانولوشن

اگر $y_1(t)$ پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x_1(t)$ باشد پاسخ آن را به ورودی‌های $x_2(t)$ و $x_3(t)$ تعیین نمایید.




35

## مثال: نکته‌های کانولوشن

ورودی و خروجی یک سیستم LTI داده شده است.

پاسخ ضربه‌ی این سیستم را به دست آورید.

$$x(t)=e^{-5t}\,u(t)$$

$$y(t)=sin(5t)$$

(راهنمایی: می‌توانید از نکته‌ی $y'(t)=x'(t)*h(t)$ استفاده کنید.)

36


فهرست مطالب
جمع کانولوشن (برای سیستم‌های LTI زمان گسسته)
انتگرال کانولوشن (برای سیستم‌های LTI زمان پیوسته)
ویژگی‌های کانولوشن
نکته‌های کانولوشن
بررسی ویژگی‌های سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربه
معرفی پاسخ پله‌ی سیستم‌های LTI
سیستم‌های توصیف شده با معادله‌ی دیفرانسیل (دیفرنس) خطی با ضرایب ثابت
بررسی ویژگی‌های سیستم‌های توصیف شده با معادله‌ی دیفرانسیل (دیفرنس)...
نمایش نمودار بلوکی سیستم‌ها
مثال‌های مروری
37