هر که گوید جمله حق است احمقی است
آن که گوید جمله باطل او شقی است

سیستم های فازی

9

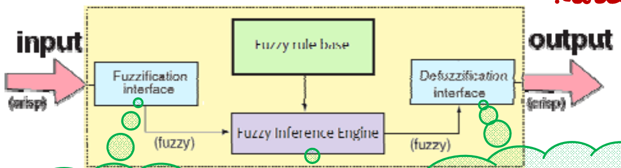
Presented By: A. Maleki
Spring 2011

دستورکار این جلسه:

سیستم های فازی در نقش نگاشت غیرخطی

- مقدمه
- سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز متوسط مراکز
- سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم
- سیستم‌های فازی به عنوان تقریب‌گر عمومی
- قضیه‌ی تقریب عمومی

مقدمه:



فازی‌ساز Singleton
فازی‌ساز گوسی
فازی‌ساز مثلثی

نافازی‌ساز مرکز ثقل
نافازی‌ساز متوسط مراکز
نافازی‌ساز ماکزیمم

موتور استنتاج ضرب
موتور استنتاج مینیمم
موتور استنتاج Lukasiewicz
موتور استنتاج Zadeh
موتور استنتاج Dienes-Rescher

بنابراین، ترکیب‌های مختلف سیستم فازی:
۳×۵×۳

مقدمه:

«نافازی‌ساز مرکز ثقل» از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه است درحالی که «نافازی‌ساز متوسط مراکز» تقریب خوبی از آن است و هزینه‌ی محاسباتی بسیار کمتری دارد.

از این رو، سیستم‌های فازی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

۱- سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز متوسط مراکز
۲- سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l، نرمال با مرکز $\bar{y}^l$ باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{l} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{l} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)} \quad , \ x \in U \subset R^n \ , \quad f(x) \in V \subset R$$

یادآوری: نافازی‌ساز متوسط مراکز:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l}$$

موتور استنتاج ضرب با فازی‌ساز singleton :

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i^*) \, \mu_{B^l}(y) \right]$$

سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز متوسط مراکز:

- سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز
- سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز
- سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز گوسی با ضرب جبری برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز
- سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز
- سیستم فازی با موتور استنتاج Lukasiewicz یا موتور استنتاج Dienes-Rescher ، یکی از فازی‌سازهای singleton، گوسی یا مثلثی و نافازی‌ساز متوسط مراکز

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l، نرمال با مرکز $\bar{y}^l$ باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)} \quad , \ x \in U \subset R^n \ , \quad f(x) \in V \subset R$$

از ارتباط بین $x \in U \subset R^n$ و $f(x) \in V \subset R$ می‌توان تعبیر یک نگاشت غیرخطی را برای سیستم‌های فازی مطرح نمود.

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l، نرمال با مرکز $\bar{y}^l$ باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{l} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{l} \mu_{A_i^l}(x_i)\right)} \quad , \ x \in U \subset R^n \ , \quad f(x) \in V \subset R$$

این رابطه نشانگر آن است که خروجی سیستم فازی، یک میانگین وزن‌دار مراکز مجموعه‌های فازی تالی قواعد فازی می‌باشد که مقدار وزن‌ها نیز بر حسب مقدار عضویت مجموعه‌های فازی مقدم قواعد در نقطه‌ی ورودی است.

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \qquad l=1,\cdots,M$$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز $\bar{y}^l$ باشد، برای موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton ، نافازی‌ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l\ exp\left[-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right] \ , a_i^l \in [0,1] \ , \sigma_i^l \in (0,\infty)\ , \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = exp\left[-(y-\bar{y}^l)^2\right] \ , \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^l\ exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^l\ exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

نقش دوگانه‌ی سیستم‌های فازی:

- از یک سو، سیستم‌های مبتنی بر قاعده هستند که از مجموعه‌ای از قواعد زبانی تشکیل شده‌اند.
- از سوی دیگر، نشانگر یک نگاشت غیرخطی هستند که می‌توان با فرمولی دقیق و فشرده آن را بازنمایی نمود.

یک ویژگی ارزشمند نظریه‌ی سیستم‌های فازی آن است که یک روند سیستماتیک برای تبدیل مجموعه‌ای از قواعد زبانی به نگاشتی غیرخطی فراهم می‌سازد.
به واسطه‌ی سادگی پیاده‌سازی این نگاشت غیرخطی، فازی جایگاه ویژه‌ای در حوزه‌های مختلف مهندسی یافته است.

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز گوسی با ضرب جبری برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \qquad l=1,\cdots,M$$

برای موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز گوسی با ضرب جبری برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l\ exp\left[-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right] \ , a_i^l \in [0,1] \ , \sigma_i^l \in (0,\infty)\ , \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = exp\left[-(y-\bar{y}^l)^2\right] \ , \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} exp\left(-\left(\frac{(x_i-\bar{x}_i^l)^2}{a_i^2+(\sigma_i^l)^2}\right)\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{n} exp\left(-\left(\frac{(x_i-\bar{x}_i^l)^2}{a_i^2+(\sigma_i^l)^2}\right)\right)\right)}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \qquad l=1,\cdots,M$$

اگر مجموعه‌ی فازی B^l ، نرمال با مرکز $\bar{y}^l$ باشد، برای موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(min_{i=1}^{n}\, \mu_{A_i^l}(x_i)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(min_{i=1}^{n}\, \mu_{A_i^l}(x_i)\right)} \quad , \ x \in U \subset R^n \ , \qquad f(x) \in V \subset R$$

یادآوری: نافازی‌ساز متوسط مراکز:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l\, w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l}$$

موتور استنتاج مینیمم با فازی‌ساز singleton :

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[min\ \left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \ldots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

برای موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز گوسی با مینیمم برای t-norm و نافازی‌ساز متوسط مراکز و توابع عضویت گوسی

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l\ exp\left[-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right], a_i^l \in [0,1], \sigma_i^l \in (0,\infty), \quad \bar{x}_i^l \in R$$

$$\mu_{B^l}(y) = exp\left[-(y - \bar{y}^l)^2\right], \quad \bar{y}^l \in R$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(min_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^M \left(min_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

یادآوری: موتور استنتاج ضرب با فازی‌ساز گوسی و ضرب جبری برای t-norm:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_{iP}^l - x_i^*}{a_i}\right)^2} \mu_{B^l}(y)\right], \quad x_{iP}^l = \frac{a_i^2 \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i^*}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}$$

$$\cdots = -\left(\frac{\frac{a_i^2\bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2 - \left(\frac{\frac{a_i^2\bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2} - x_i}{a_i}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{a_i^2\bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i - a_i^2\bar{x}_i^l - (\sigma_i^l)^2\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l\left(a_i^2 + (\sigma_i^l)^2\right)}\right)^2 - \left(\frac{a_i^2\bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i - a_i^2 x_i - (\sigma_i^l)^2 x_i}{a_i\left(a_i^2 + (\sigma_i^l)^2\right)}\right)^2$$

$$= -\left(\frac{\sigma_i^l(x_i - \bar{x}_i^l)}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}\right)^2 - \left(\frac{a_i(\bar{x}_i^l - x_i)}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}\right)^2 = -\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2\left(a_i^2 + (\sigma_i^l)^2\right)}{\left(a_i^2 + (\sigma_i^l)^2\right)^2} = -\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}$$

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}\right)\right)\right)}{\sum_{l=1}^M \left(\prod_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{(x_i - \bar{x}_i^l)^2}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}\right)\right)\right)}$$

سیستم فازی با موتور استنتاج Lukasiewicz یا Dienes-Rescher ، فازی‌ساز singleton ، گوسی یا مثلثی و نافازی‌ساز متوسط مراکز:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز $\bar{y}^l$ می‌باشد:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \ldots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

برای موتور استنتاج Lukasiewicz یا موتور استنتاج Dienes-Rescher ، هر کدام از فازی‌سازهای singleton ، گوسی یا مثلثی، نافازی‌ساز متوسط مراکز، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \frac{1}{M}\sum_{l=1}^M \bar{y}^l$$

این دسته سیستم های فازی از دیدگاه کاربردی فاقد ارزش هستند.

یادآوری: موتور استنتاج Lukasiewicz:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[\sup_{x \in U} min\left(\mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i)\right) + \mu_{B^l}(y)\right)\right]$$

یادآوری: موتور استنتاج Dienes-Rescher :

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M}\left[\sup_{x \in U} min\left(\mu_{A'}(x), max\left(1 - \min_{i=1:n}\left(\mu_{A_i^l}(x_i)\right), \mu_{B^l}(y)\right)\right)\right]$$

یادآوری: موتور استنتاج مینیمم با فازی‌ساز گوسی و مینیمم برای t-norm:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[min\left(e^{-\left(\frac{x_{1M}^l - \bar{x}_1^l}{\sigma_1^l}\right)^2}, \cdots, e^{-\left(\frac{x_{nM}^l - \bar{x}_n^l}{a_n}\right)^2}, \mu_{B^l}(y)\right)\right], \quad x_{iM}^l = \frac{a_i\bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i^*}{a_i + \sigma_i^l}$$

$$\left(\frac{x_{iM}^l - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2 = \left(\frac{\frac{a_i\bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i}{a_i + \sigma_i^l} - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2 = \left(\frac{a_i\bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i - a_i\bar{x}_i^l - \sigma_i^l\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l(a_i + \sigma_i^l)}\right)^2 = \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left(min_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^M \left(min_{i=1}^n\ exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{a_i + \sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم:

- سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم
- سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم

سیستم فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز $\bar{y}^l$ می‌باشد:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \ldots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

$$l* \epsilon \{1, \cdots, M\}\ such\ that \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l*}}(x_i) \geq \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\ \ for\ all\ l = 1, \cdots, M$$

یادآوری:

موتور استنتاج ضرب با فازی‌ساز singleton :

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i^*)\, \mu_{B^l}(y)\right]$$

$$\sup_{y \epsilon V} \mu_{B'}(y) = \sup_{y \epsilon V} \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\, \mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= \max_{l=1:M} \sup_{y \epsilon V}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\, \mu_{B^l}(y)\right]$$

$$= \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l*}}(x_i)$$

$$\mu_{B^l}(\bar{y}^{l*}) = \begin{cases} \leq 1 & l \neq l* \\ 1 & l = l* \end{cases}$$

$$\mu_{B'}(\bar{y}^{l*}) = \max_{l=1:M}\left[\prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\, \mu_{B^l}(\bar{y}^{l*})\right] = \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l*}}(x_i)$$

بنابراین $\sup_{y \epsilon V}$ در $y = \bar{y}^{l*}$ است.

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

$$l* \epsilon \{1, \cdots, M\}\ such\ that \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^{l*}}(x_i) \geq \prod_{i=1}^{n} \mu_{A_i^l}(x_i)\ \ for\ all\ l = 1, \cdots, M$$

تعبیر شهودی این سیستم فازی:

در این حالت، سیستم فازی یک تابع تکه‌ای ثابت است که مقادیر ثابت آن، مرکز توابع عضویت بخش تالی قواعد می‌باشد.

سیستم فازی با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم:

سیستم فازی با پایگاه قواعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید که در آن، مجموعه فازی B^l نرمال و با مرکز $\bar{y}^l$ می‌باشد:

$$Ru^{(l)}: IF\ x_1 is\ A_1^l\ and \dots and\ x_n is\ A_n^l, THEN\ y\ is\ B^l, \quad l = 1, \cdots, M$$

با موتور استنتاج مینیمم، فازی‌ساز singleton و نافازی‌ساز ماکزیمم، سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

$$l* \epsilon \{1, \cdots, M\}\ such\ that\ \min_{i=1:n}\left[\mu_{A_i^{l*}}(x_i)\right] \geq \min_{i=1:n}\left[\mu_{A_i^l}(x_i)\right]\ for\ all\ l = 1, \cdots, M$$

ویژگی‌های این سیستم فازی:

- در این سیستم فازی، تا زمانی که حاصل‌ضرب مقادیر تابع عضویت مجموعه‌های فازی مقدم قاعده بزرگتر مساوی مقدار متناظر در دیگر قواعد باشد خروجی سیستم فازی بدون تغییر باقی می‌ماند.
- درنتیجه، این نوع سیستم فازی نسبت به اغتشاشات کوچک در ورودی و در توابع عضویت $\mu_{A_i^l}(x_i)$ مقاوم است.
- این سیستم‌های فازی پیوسته نیستند بدان معنی که وقتی $l*$ از یک عدد به عدد دیگر تغییر می‌کند f(x) به صورت گسسته تغییر می‌یابد که این رفتار در کنترل حلقه بسته نامطلوب است (هرچند که در تصمیم‌گیری و دیگر کاربردهای حلقه باز اشکالی ایجاد نمی‌کند).

واژه‌نامه

تصمیم‌گیری	decision making

سیستم فازی با موتورهای استنتاج Zadeh ، Lukasiewicz و Dienes-Rescher و نافازی‌ساز ماکزیمم:

برای سیستم‌های فازی با نافازی‌ساز ماکزیمم و موتورهای استنتاج Lukasiewicz ، Zadeh و Dienes-Rescher ، دستیابی به عبارتی به فرم بسته مشکل است.
مشکل از آنجا سرچشمه می‌گیرد که sup و min بر خلاف sup و max ، در حالت کلی قابل جابجایی نیست.
برای این موارد لازم است محاسبات اجزای مختلف سیستم فازی شامل محاسبه‌ی خروجی فازی‌ساز، خروجی موتور استنتاج فازی و خروجی نافازی‌ساز، در پی هم انجام گردد که محاسبات بسیار پیچیده‌ای خواهد بود.

یادآوری:

موتور استنتاج مینیمم با فازی‌ساز singleton :

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M}\left[min\left(\mu_{A_1^l}(x_1^*), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right)\right]$$

$$\sup_{y\epsilon V} \mu_{B'}(y) = \sup_{y\epsilon V} \max_{l=1:M}\left[min\left(\mu_{A_1^l}(x_1), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right)\right]$$

$$= \max_{l=1:M} \sup_{y\epsilon V}\left[min\left(\mu_{A_1^l}(x_1), \cdots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right)\right]$$

$$= \max_{l=1:M} \min_{i=1:n}\left[\mu_{A_i^l}(x_i)\right]$$

$$= \min_{i=1:n}\left[\mu_{A_i^{l*}}(x_i)\right]$$

$$= \mu_{B'}(\bar{y}^{l*})$$

$$f(x) = \bar{y}^{l*}$$

قضیه‌ی تقریب عمومی:

با فرض این که U مجموعه‌ی فشرده‌ای در R^n باشد برای هر تابع پیوسته‌ی حقیقی g(x) در U و هر ε > 0 ، یک سیستم فازی به فرم

$$f(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left(\prod_{i=1}^{l} a_i^l\, exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{l} a_i^l\, exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

وجود دارد به نحوی که:

$$\sup_{x\epsilon U}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$$

به عبارت دیگر،
سیستم‌های فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز singleton ، نافازی‌ساز متوسط مراکز و تابع عضویت گوسی، تقریب‌گر عمومی هستند.

سیستم‌های فازی به عنوان تقریب‌گرهای عمومی:

مزیت‌های بازنمایی سیستم فازی به صورت رابطه‌ای غیرخطی:

- این فرم‌های فشرده، محاسبات سیستم‌های فازی را ساده می‌کند.
- امکان تحلیل سیستم‌های فازی به طور دقیق را فراهم می‌سازند.

یک سوال مهم و اساسی:
سیستم‌های فازی قادر است چه نوع توابع غیرخطی را بازنمایی کند یا تقریب بزند و با چه دقتی؟

واژه‌نامه

universal approximator	تقریب‌گر عمومی

به منظور اثبات قضیه‌ی تقریب عمومی، با فرض اینکه Y مجموعه‌ای شامل تمام سیستم های فازی به فرم مورد نظر باشد نشان می‌دهیم که:

۱- Y یک جبر است.

۲- Y نقاط فضای ورودی را متمایز می سازد.

۳- در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی، Y به صفر نمی‌رسد.

قضیه‌ی stone-weierstrass :

فرض کنید Z مجموعه‌ای از توابع پیوسته‌ی حقیقی در مجموعه‌ی فشرده‌ی U باشد. اگر

۱- Z یک جبر باشد یعنی نسبت به جمع، ضرب و ضرب اسکالر بسته باشد،

۲- Z نقاط U را متمایز سازد یعنی برای هر x,y∈U, x≠y ، یک f∈Z وجود داشته باشد به نحوی که f(x) ≠ f(y) باشد.

۳- Z در هیچ نقطه‌ای از U به صفر نرسد یعنی برای هر x∈U یک f∈Z وجود داشته باشد چنان که f(x) ≠ 0 باشد.

آنگاه برای هر تابع پیوسته‌ی حقیقی g(x)∈U و هر مقدار دلخواه ε > 0 ، یک f∈Z وجود دارد چنان که:

$$\sup_{x\epsilon U}|f(x)-g(x)|<\varepsilon$$

واژه‌نامه

vanish	به صفر رسیدن

۱- Y یک جبر است.

فرض کنید $f_1 , f_2 \in Y$ باشد. از این رو، آنها را می توان به صورت روبرو نوشت:

$$f_1(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M1}\overline{y1}^l\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^l}{\sigma1_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M1}\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^l}{\sigma1_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

$$f_2(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M2}\overline{y2}^l\left(\prod_{i=1}^{n}a2_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^l}{\sigma2_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M2}\left(\prod_{i=1}^{n}a2_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^l}{\sigma2_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

در این صورت،

$$f_1(x)+f_1(x)=\frac{\sum_{l1=1}^{M1}\sum_{l2=1}^{M2}\left(\overline{y1}^{l1}+\overline{y2}^{l2}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^{l1}a2_i^{l2}\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^{l1}}{\sigma1_i^{l1}}\right)^2-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^{l2}}{\sigma2_i^{l2}}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l1=1}^{M1}\sum_{l2=1}^{M2}\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^{l1}a2_i^{l2}\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^{l1}}{\sigma1_i^{l1}}\right)^2-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^{l2}}{\sigma2_i^{l2}}\right)^2\right)\right)}$$

$$f_1(x)f_1(x)=\frac{\sum_{l1=1}^{M1}\sum_{l2=1}^{M2}\left(\overline{y1}^{l1}\overline{y2}^{l2}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^{l1}a2_i^{l2}\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^{l1}}{\sigma1_i^{l1}}\right)^2-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^{l2}}{\sigma2_i^{l2}}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l1=1}^{M1}\sum_{l2=1}^{M2}\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^{l1}a2_i^{l2}\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^{l1}}{\sigma1_i^{l1}}\right)^2-\left(\frac{x_i-\overline{x2}_i^{l2}}{\sigma2_i^{l2}}\right)^2\right)\right)}$$

$$cf_1(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M1}c\overline{y1}^l\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^l}{\sigma1_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{n}a1_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\overline{x1}_i^l}{\sigma1_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

بنابراین Y یک جبر است.

۲- Y نقاط فضای ورودی را متمایز می سازد.

فرض کنید $x^0 , z^0 \in U$ دو نقطه‌ی دلخواه متمایز باشند $(x^0 \neq z^0)$. اگر در رابطه‌ی

$$f(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

پارامترها به صورت زیر باشند:

$$M=2,\quad \bar{y}^1=0,\quad \bar{y}^2=1,\quad a_i^l=1,\quad \sigma_i^l=1,\quad \bar{x}_i^1=x_i^0,\quad \bar{x}_i^2=z_i^0$$

$$l=1,\cdots,M,\quad i=1,\cdots,n$$

سیستم فازی به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\frac{exp\left(-\|x-z^0\|_2^2\right)}{exp(-\|x-x^0\|_2^2)+exp(-\|x-z^0\|_2^2)}$$

$$f(x^0)=\frac{exp\left(-\|x^0-z^0\|_2^2\right)}{1+exp(-\|x^0-z^0\|_2^2)}\qquad f(z^0)=\frac{1}{1+exp(-\|x^0-z^0\|_2^2)}$$

از آنجا که $x^0 \neq z^0$ است درنتیجه، $exp\left(-\|x^0-z^0\|_2^2\right)\neq 1$ است و بنابراین $f(x^0) \neq f(z^0)$ می باشد یعنی Y فضای ورودی را متمایز می‌سازد.

۳- در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی، Y به صفر نمی‌رسد.

در سیستم فازی به فرم

$$f(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left(\prod_{i=1}^{l}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{l}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

اگر تمام $\bar{y}^l$ ها بزرگتر از صفر باشند آنگاه $f(x)>0, \quad \forall x \in U$

بنابراین Y در هیچ نقطه‌ای از فضای ورودی به صفر نمی‌رسد.

بدین ترتیب،
بر اساس قضیه‌ی stone-weierstrass ،
قضیه‌ی تقریب عمومی اثبات می‌گردد.

قضیه‌ی فرعی:

تعمیم قضیه‌ی تقریب عمومی
به توابع گسسته

برای هر تابع مربع-انتگرال پذیر g(x) در مجموعه‌ی فشرده‌ی $U \in R^n$ ،

یا به عبارت دیگر، برای هر $g \in L_2(U)=\left\{g: U \to R \;\middle|\; \int_U |g(x)|^2dx<\infty\right\}$

سیستم فازی f(x) به فرم

$$f(x)=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left(\prod_{i=1}^{l}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\left(\prod_{i=1}^{l}a_i^l\,exp\left(-\left(\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)\right)}$$

وجود دارد به نحوی که:

$$\left(\int_U |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

واژه‌نامه

square integrable	مربع انتگرال‌پذیر