

حرکت کهید جوجن است احتمی است  
آن که کهید جوجن باطل، اوستی است

# سیستم های فازی

8

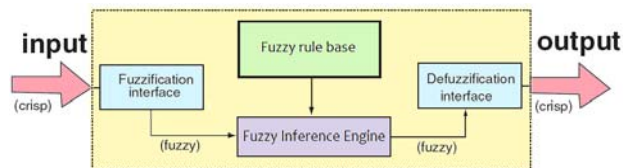
Presented By: A. Maleki  
Spring 2011

دستور کار این جلسه:

## فازی سازها و نافازی سازها

- مقدمه
- فازی سازها (معیارهای طراحی، معرفی انواع و مقایسه)
- نافازی سازها (معیارهای انتخاب، معرفی انواع و مقایسه)
- مثالها

مقدمه:



○ ضرورت وجود فازی ساز و نافازی ساز:

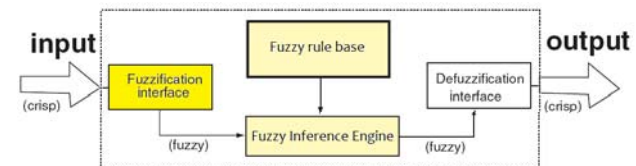
ورودی و خروجی سیستم استنتاج فازی، فازی هستند در حالی که در اغلب کاربردها، ورودی و خروجی سیستم فازی مقادیر عددی می باشند. از این رو به واسطه هایی نیاز است که تبدیل های لازم را انجام دهند.

واژه نامه



fuzzifier	فازی ساز
defuzzifier	نافازی ساز

فازی ساز:



○ فازی ساز واسطی است که مقادیر حقیقی  $x^* \in U \subset \mathbb{R}^n$  را به مجموعه ی فازی  $A'$  در  $U$  می نگارد.

## فازی سازها:

- فازی ساز singleton
- فازی ساز گوسی
- فازی ساز مثلثی

## معیارهای طراحی فازی ساز:

- فازی ساز باید این حقیقت که ورودی در مقدار غیرفازی  $x^*$  است را لحاظ نماید بدان معنا که مجموعه ی فازی  $A'$  باید دارای مقدار عضویت بزرگی در  $x^*$  باشد.
- اگر ورودی سیستم فازی توسط نویز خراب شد مطلوب است که فازی ساز به حذف نویز کمک نماید.
- مطلوب است که فازی ساز به ساده شدن محاسبات در موتور استنتاج فازی کمک نماید. پیچیده ترین عملیات محاسباتی در موتور استنتاج فازی،  $\sup$  است بنابراین مطلوب است فازی ساز موجب ساده شدن محاسبات  $\sup$  گردد.

## فازی ساز گوسی:

- این فازی ساز، مقدار عددی حقیقی  $x^* \in U$  را به مجموعه ی فازی  $A'$  در  $U$  می نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - x_1^*}{a_1}\right)^2} * \dots * e^{-\left(\frac{x_n - x_n^*}{a_n}\right)^2}$$

که در آن  $a_i$  پارامتری مثبت است و معمولا برای  $t$ -norm ( $*$ ) از ضرب جبری یا مینیمم استفاده می گردد.

## فازی ساز singleton:

- این فازی ساز، مقدار عددی حقیقی  $x^* \in U$  را به singleton فازی  $A'$  در  $U$  می نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

### فازی ساز مثلثی:

این فازی ساز، مقدار عددی حقیقی  $x^* \in U$  را به مجموعه‌ی فازی  $A'$  در  $U$  می

نگارد:

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x_1 - x_1^*|}{b_1}\right) * \dots * \left(1 - \frac{|x_n - x_n^*|}{b_n}\right) & \text{if } |x_i - x_i^*| \leq b_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن پارامتری مثبت است و معمولاً برای  $t$ -norm (\*) از ضرب جبری یا مینیمم استفاده می‌گردد.

### ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی ساز singleton

یادآوری:

موتور استنتاج ضرب:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right]$$

موتور استنتاج مینیمم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

### ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی ساز singleton

یادآوری:

موتور استنتاج Lukasiewicz:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right) + \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right) + \mu_{B^l}(y) \right]$$

موتور استنتاج Zadeh:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right) \right) \right) \right]$$

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right) \right) \right]$$

### ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی ساز singleton

یادآوری:

موتور استنتاج Dienes-Rescher:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

### ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی ساز گوسی:

○ فرض کنید پایگاه قواعدی شامل  $M$  قاعده با ویژگی های زیر باشد:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$ ,  $l = 1, \dots, M$

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} \quad \bar{x}_i^l \text{ and } \sigma_i^l : \text{constant parameters,} \\ i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, M$$

با استفاده از فازی ساز گوسی، موتور استنتاج مینیمم و مینیمم برای t-norm داریم:

$$\mu_{B^l}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \min \left( e^{-\left(\frac{x_{1M} - \bar{x}_1^l}{\sigma_1^l}\right)^2}, \dots, e^{-\left(\frac{x_{nM} - \bar{x}_n^l}{\sigma_n^l}\right)^2}, \mu_{B^l}(y) \right) \right], \quad x_{iM}^l = \frac{a_i \bar{x}_i^l + \sigma_i^l x_i^*}{a_i + \sigma_i^l}$$

یادآوری موتور استنتاج مینیمم:

$$\mu_{B^l}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A_1^l}(x), \mu_{A_2^l}(x), \dots, \mu_{A_n^l}(x), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\mu_{A_i^l}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1^l}{a_1}\right)^2} * \dots * e^{-\left(\frac{x_n - \bar{x}_n^l}{a_n}\right)^2} \quad \text{یادآوری فازی ساز گوسی:}$$

### ساده شدن محاسبات موتور استنتاج فازی برای فازی ساز گوسی:

○ فرض کنید پایگاه قواعدی شامل  $M$  قاعده با ویژگی های زیر باشد:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$ ,  $l = 1, \dots, M$

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} \quad \bar{x}_i^l \text{ and } \sigma_i^l : \text{constant parameters,} \\ i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, M$$

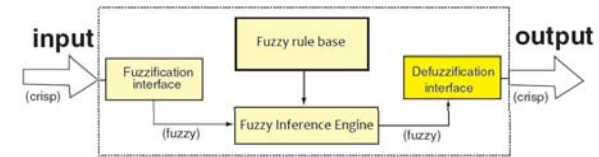
با استفاده از فازی ساز گوسی، موتور استنتاج ضرب و ضرب جبری برای t-norm داریم:

$$\mu_{B^l}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n e^{-\left(\frac{x_{iP} - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2} e^{-\left(\frac{x_{iP} - x_i^*}{a_i}\right)^2} \mu_{B^l}(y) \right], \quad x_{iP}^l = \frac{a_i \bar{x}_i^l + (\sigma_i^l)^2 x_i^*}{a_i^2 + (\sigma_i^l)^2}$$

$$\mu_{B^l}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A_1^l}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right] \quad \text{یادآوری موتور استنتاج ضرب:}$$

$$\mu_{A_i^l}(x) = e^{-\left(\frac{x_1 - \bar{x}_1^l}{a_1}\right)^2} * \dots * e^{-\left(\frac{x_n - \bar{x}_n^l}{a_n}\right)^2} \quad \text{یادآوری فازی ساز گوسی:}$$

### نافازی ساز:



○ نافازی ساز واسطی است که مجموعه ی فازی  $B^l$  در  $V$  (خروجی موتور استنتاج) را به مقادیر غیرفازی  $y^* \in V$  می نگارد.

به بیان مفهومی تر، وظیفه ی نافازی ساز، تعیین نقطه ای در  $V$  است که به بهترین صورت، مجموعه ی فازی  $B^l$  را بازتابی می کند.



### جمع بندی ویژگی های فازی سازها:

- در هر سه فازی ساز  $\mu_{A_i^l}(x^*) = 1$  است که نشانگر برآورده شدن معیار اول طراحی فازی سازها می باشد.
- مستقل از نوع قواعد فازی، استفاده از فازی ساز singleton، محاسبات موتور استنتاج فازی را به میزان قابل توجهی کاهش می دهد.
- در صورتی که توابع عضویت قواعد فازی، گوسی باشند استفاده از فازی ساز گوسی موجب کاهش محاسبات در موتور استنتاج فازی می گردد.
- در صورتی که تابع عضویت قواعد فازی، مثلثی باشند استفاده از فازی ساز مثلثی موجب کاهش محاسبات در موتور استنتاج فازی می گردد.
- فازی سازهای گوسی و مثلثی از قابلیت جلوگیری از نویز در ورودی برخوردارند ولی فازی ساز singleton فاقد این قابلیت است.

## نافازی سازها:

- نافازی ساز مرکز ثقل
- نافازی ساز متوسط مراکز
- نافازی ساز ماکزیمم

### واژه نامه

center of gravity defuzzifier	نافازی ساز مرکز ثقل
center average defuzzifier	نافازی ساز متوسط مراکز
maximum defuzzifier	نافازی ساز ماکزیمم

## معیارهای انتخاب نافازی ساز:

- معقول بودن: نقطه‌ی \*y بایستی به طور شهودی نمایانگر B' باشد. به عنوان مثال، به طور تقریبی در میانه‌ی تکیه‌گاه باشد یا دارای مقدار عضویت بزرگی در B' باشد.
- سادگی محاسباتی: این معیار به طور خاص برای کنترل فازی اهمیت دارد زیرا کنترل گره‌های فازی باید به طور **real-time** عمل نمایند.
- پیوسته بودن: تغییرات اندک در B' نبایستی به تغییرات بزرگ در \*y منجر گردد.

### واژه نامه

plausibility	معقول بودن
computational simplicity	سادگی محاسباتی
continuity	پیوسته بودن
support	تکیه‌گاه

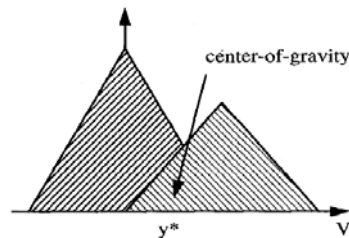
## ارزیابی نافازی ساز مرکز ثقل:

- معقول بودن به طور شهودی 😊
- حجم بالای محاسبات ⚡

## نافازی ساز مرکز ثقل:

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy}$$

مرکز ناحیه‌ی پوشش داده شده توسط تابع عضویت B'



- گاهی اوقات بهتر است نقاطی که میزان تعلق آنها در B' بسیار کوچک است از محاسبات حذف گردد که در این صورت به آن **indexed center of gravity defuzzifier** گوئیم.

$$y^* = \frac{\int_{V_\alpha} y \mu_{B'}(y) dy}{\int_{V_\alpha} \mu_{B'}(y) dy}, V_\alpha = \{y \in V \mid \mu_{B'}(y) \geq \alpha\}$$

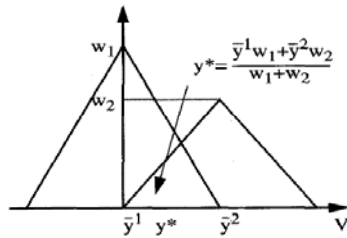
## ارزیابی نافی سازی متوسط مراکز:

- ☺ معقول بودن به طور شهودی
- ☺ محاسبات ساده
- ☺ تغییرات اندک در  $w_1$  و  $w_2$  به تغییرات اندکی در  $y^*$  منجر می گردد.

## نافی سازی متوسط مراکز:

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}$$

$\bar{y}^l$  : the center of the  $l$ 'th fuzzy set  
 $w_l$  : the height of the  $l$ 'th fuzzy set



این نافی سازی، پرکاربردترین نافی سازی در سیستم های فازی و کنترل فازی می باشد.

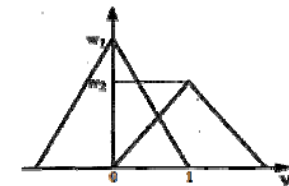
### مثال:

فرض کنید مجموعه ی فازی 'B' اجتماع دو مجموعه ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافی سازی تعیین شده،  $y^*$  را محاسبه نمایید.

الف: نافی سازی متوسط مراکز  $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$  محل برخورد دو مجموعه ی فازی

ب: نافی سازی مرکز ثقل

$$y^* = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

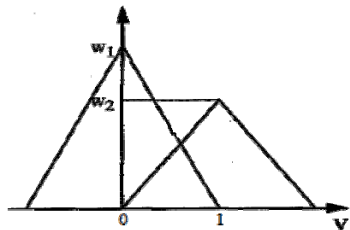


### مثال:

فرض کنید مجموعه ی فازی 'B' اجتماع دو مجموعه ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافی سازی تعیین شده،  $y^*$  را محاسبه نمایید.

الف: نافی سازی متوسط مراکز

ب: نافی سازی مرکز ثقل



محل برخورد دو مجموعه ی فازی  $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$

### مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی B' اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، y\* را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز  $y = \frac{w_1}{w_1 + w_2}$  محل برخورد دو مجموعه‌ی فازی

ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل

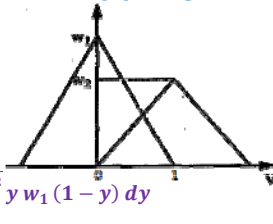
$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy}$$

$$\int_V \mu_{B'}(y) dy = w_1 + w_2 - \frac{1}{2} w_2 \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

$$\int_V y \mu_{B'}(y) dy = \int_{-1}^0 y w_1 (1+y) dy + \int_0^{\frac{w_1}{w_1+w_2}} y w_1 (1-y) dy$$

$$+ \int_{\frac{w_1}{w_1+w_2}}^1 y w_2 y dy + \int_1^2 y w_2 (2-y) dy$$

$$= -\frac{1}{6} w_1 + w_2 + \frac{1}{6} \frac{w_1^3}{(w_1 + w_2)^2}$$



### مثال:

فرض کنید مجموعه‌ی فازی B' اجتماع دو مجموعه‌ی فازی نشان داده شده در شکل زیر باشد. با استفاده از نافازی‌سازهای تعیین شده، y\* را محاسبه نمایید.

الف: نافازی‌ساز متوسط مراکز  $y^* = \frac{w_2}{w_1 + w_2}$  برای نافازی‌ساز متوسط مراکز

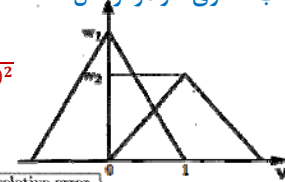
ب: نافازی‌ساز مرکز ثقل

$$\int_V \mu_{B'}(y) dy = w_1 + w_2 - \frac{1}{2} w_2 \frac{w_1}{w_1 + w_2}$$

$$\int_V y \mu_{B'}(y) dy = -\frac{1}{6} w_1 + w_2 + \frac{1}{6} \frac{w_1^3}{(w_1 + w_2)^2}$$

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy}$$

w <sub>1</sub>	w <sub>2</sub>	y* (center of gravity)	y* (center average)	relative error
0.9	0.7	0.4258	0.4375	0.0275
0.9	0.5	0.5457	0.5385	0.0133
0.9	0.2	0.7313	0.7000	0.0428
0.6	0.7	0.3324	0.3571	0.0743
0.6	0.5	0.4460	0.4545	0.0192
0.6	0.2	0.6471	0.6250	0.0342
0.3	0.7	0.1477	0.1818	0.2308
0.3	0.5	0.2155	0.2500	0.1600
0.3	0.2	0.3818	0.4000	0.0476



### نافازی‌ساز ماکزیمم:

$$hgt(B') = \{y \in V \mid \mu_{B'}(y) = \sup_{y \in V} \mu_{B'}(y)\}$$

y\* : any point in hgt(B')

• Smallest of maxima defuzzifier:  $y^* = \inf \{y \in hgt(B')\}$

• Largest of maxima defuzzifier:  $y^* = \sup \{y \in hgt(B')\}$

• Mean of maxima defuzzifier:  $y^* = \frac{\int_{hgt(B')} y dy}{\int_{hgt(B')} dy}$

### ارزیابی نافازی‌ساز ماکزیمم:

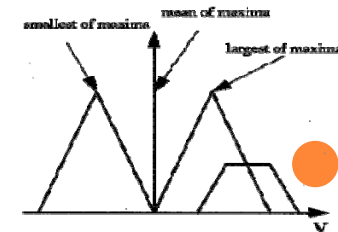
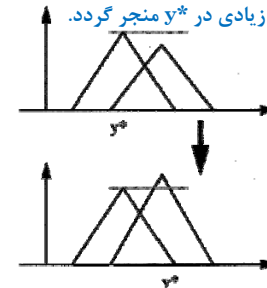
☹️ معقول بودن به طور شهودی

😊 سادگی محاسباتی

⚡ تناقض mean of maxima defuzzifier با مفهوم شهودی

ماکزیمم مقدار عضویت

⚡ تغییرات اندک در B' ممکن است به تغییرات زیادی در y\* منجر گردد.



## مقایسه‌ی نافازی سازها:

	center of gravity	center average	maximum
plausibility	yes	yes	yes
computational simplicity	no	yes	yes
continuity	yes	yes	no

## مثال:

یک سیستم دو ورودی - یک خروجی در نظر بگیرید که از دو قاعده‌ی زیر تشکیل شده است:

$Ru^{(1)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1$  and  $x_2$  is  $A_2$ , THEN  $y$  is  $A_1$

$Ru^{(2)}$ : IF  $x_1$  is  $A_2$  and  $x_2$  is  $A_1$ , THEN  $y$  is  $A_2$

که  $A_1$  و  $A_2$  مجموعه‌های فازی در  $R$  با تابع عضویت زیر می‌باشند:

$$\mu_{A_1}(u) = \begin{cases} 1 - |u| & -1 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \mu_{A_2}(u) = \begin{cases} 1 - |u - 1| & 0 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

فرض کنید ورودی سیستم فازی  $(x_1^*, x_2^*) = (0.3, 0.6)$  است و از فازی‌ساز singleton استفاده می‌گردد. خروجی سیستم فازی  $y^*$  را در شرایط زیر تعیین نمایید.

الف: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز متوسط مراکز

ب: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز مرکز ثقل

ج: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز mean of maxima

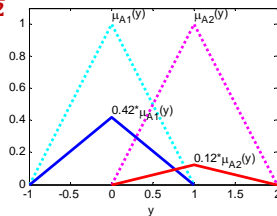
د: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی‌ساز متوسط مراکز

## حل الف:

الف: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز متوسط مراکز

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \max[\mu_{A_1}(0.3) \mu_{A_2}(0.6) \mu_{A_1}(y), \mu_{A_2}(0.3) \mu_{A_1}(0.6) \mu_{A_2}(y)] \\ &= \max[(0.7)(0.6) \mu_{A_1}(y), (0.3)(0.4) \mu_{A_2}(y)] \\ &= \max[0.42 \mu_{A_1}(y), 0.12 \mu_{A_2}(y)] \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{0.42 \times 0 + 0.12 \times 1}{0.42 + 0.12} = 0.2$$



## حل ب:

ب: موتور استنتاج ضرب و نافازی‌ساز مرکز ثقل

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \max[\mu_{A_1}(0.3) \mu_{A_2}(0.6) \mu_{A_1}(y), \mu_{A_2}(0.3) \mu_{A_1}(0.6) \mu_{A_2}(y)] \\ &= \max[(0.7)(0.6) \mu_{A_1}(y), (0.3)(0.4) \mu_{A_2}(y)] \\ &= \max[0.42 \mu_{A_1}(y), 0.12 \mu_{A_2}(y)] \end{aligned}$$

$$\int_V \mu_{B'}(y) dy = 0.42 + 0.12 - \frac{1}{2} \times \frac{0.42 \times 0.12}{0.12 + 0.42} = 0.4933$$

$$\begin{aligned} \int_V y \mu_{B'}(y) dy &= -\frac{1}{6} w_1 + w_2 + \frac{1}{6} \frac{w_1^3}{(w_1 + w_2)^2} \\ &= -\frac{1}{6} \times 0.42 + 0.12 + \frac{1}{6} \times \frac{(0.42)^3}{(0.42 + 0.12)^2} = 0.0932 \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{B'}(y) dy}{\int_V \mu_{B'}(y) dy} = \frac{0.0932}{0.4933} = 0.1871$$



حل ج:

ج: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی ساز mean of maxima

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \min_{l=1:M} \left[ 1, 1 - \min_{i=1:n} (\mu_{A_i}(x_i^*)) + \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \min \left[ 1, 1 - \min (\mu_{A_1}(0.3), \mu_{A_2}(0.6)) + \mu_{A_1}(y), \right. \\ &\quad \left. 1 - \min (\mu_{A_2}(0.3), \mu_{A_1}(0.6)) + \mu_{A_2}(y) \right] \\ &= \min [1, 1 - \min(0.7, 0.6) + \mu_{A_1}(y), 1 - \min(0.3, 0.4) + \mu_{A_2}(y)] \\ &= \min [1, 0.4 + \mu_{A_1}(y), 0.7 + \mu_{A_2}(y)]\end{aligned}$$

$$y^* = 0.35$$



حل د:

د: موتور استنتاج Lukasiewicz و نافازی ساز متوسط مراکز

$$\begin{aligned}\mu_{B'}(y) &= \min_{l=1:M} \left[ 1, 1 - \min_{i=1:n} (\mu_{A_i}(x_i^*)) + \mu_{B^l}(y) \right] \\ &= \min \left[ 1, 1 - \min (\mu_{A_1}(0.3), \mu_{A_2}(0.6)) + \mu_{A_1}(y), \right. \\ &\quad \left. 1 - \min (\mu_{A_2}(0.3), \mu_{A_1}(0.6)) + \mu_{A_2}(y) \right] \\ &= \min [1, 1 - \min(0.7, 0.6) + \mu_{A_1}(y), 1 - \min(0.3, 0.4) + \mu_{A_2}(y)] \\ &= \min [1, 0.4 + \mu_{A_1}(y), 0.7 + \mu_{A_2}(y)]\end{aligned}$$

$$y^* = \frac{0 \times 1 + 1 \times 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$



QUESTIONS?

