

حرکت کنید چون است احتمالی است  
آن که کید جمله باطل، اوستی است

# سیستم های فازی

7

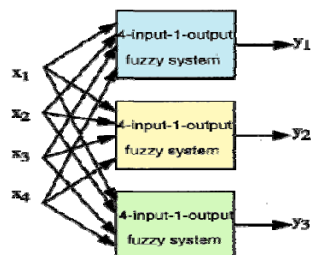
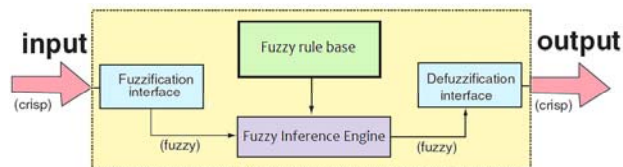
Presented By: A. Maleki  
Spring 2011

## پایگاه قواعد فازی و موتور استنتاج فازی

عنوان مطالب:

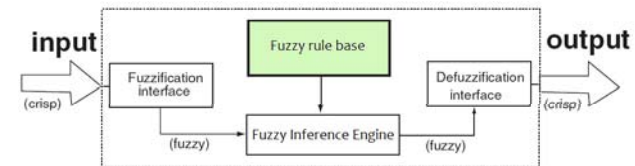
- مقدمه
- ساختار پایگاه قواعد فازی
- ویژگی های مجموعه قواعد فازی
- استنتاج بر اساس ترکیب
- استنتاج بر اساس تک تک قاعده ها
- معرفی برخی موتورهای استنتاج
- مثال ها

### یادآوری اجزای سیستم های فازی:



- تجزیه ی سیستم های فازی به سیستم های چند ورودی یک خروجی:
- در حالت کلی، سیستم فازی می تواند  $n$  ورودی  $m$  خروجی باشد ولی می توان چنین سیستمی را به صورت  $m$  سیستم  $n$  ورودی یک خروجی در نظر گرفت.

### پایگاه قواعد فازی:



## فرم متعارف قاعده‌ی اگر-آنگاه فازی:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

$A_i^l$ : fuzzy set in  $U_i, i = 1, \dots, n$

$B^l$ : fuzzy set in  $V$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in U$ : input linguistic variables

$y \in V$ : output linguistic variable

$l$ : index of Rule ( $l = 1, 2, \dots, M$ )

واژه‌نامه

canonical form

فرم متعارف

## فرم متعارف قاعده‌ی اگر-آنگاه فازی:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

فرم متعارف قاعده‌ی اگر-آنگاه فازی، حالت‌های خاص زیر را شامل می‌گردد:

الف: قواعد جزئی (partial rules)

IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_m$  is  $A_m^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

ب: قواعد یا (OR rules)

IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_m$  is  $A_m^l$  OR  $x_{m+1}$  is  $A_{m+1}^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

ج: عبارت فازی تنها (single fuzzy statement)

$y$  is  $B^l$

د: قواعد تدریجی (gradual rules)

the smaller the  $x$ , the bigger the  $y$

ه: قواعد غیرفازی (non-fuzzy rules)

## ویژگی‌های مجموعه قواعد فازی:

- کامل بودن
- سازگار بودن
- پیوسته بودن

واژه‌نامه

completeness

کامل بودن

consistency

سازگار بودن

continuity

پیوسته بودن

## کامل بودن مجموعه قواعد:

مجموعه قواعد اگر-آنگاه فازی را کامل گوئیم اگر برای هر  $x \in U$ ، حداقل یک

قاعده ی  $Ru^{(l)}$  وجود داشته باشد که :

$$\mu_{A_i^l}(x_i) \neq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n$$

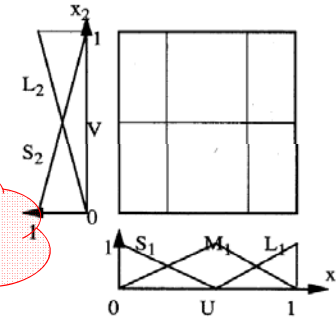
به طور شهودی، کامل بودن مجموعه قواعد بدان مفهوم است که برای هر نقطه در فضای ورودی، حداقل یک قاعده آتش کند (میزان تعلق بخش مقدم قاعده غیرصفر باشد).



### مثال ۲:

سیستم فازی ۲- ورودی ۱- خروجی با  $U=U_1 \times U_2 = [0,1] \times [0,1]$  و  $V=[0,1]$  را در نظر بگیرید. سه مجموعه‌ی فازی  $S_1$ ،  $M_1$  و  $L_1$  در  $U_1$  و دو مجموعه‌ی فازی  $S_2$  و  $L_2$  در  $U_2$  مطابق شکل زیر تعریف شده‌اند. مجموعه فازی شامل ۶ قاعده‌ی زیر است که در آن  $B^l (l=1,2,\dots,6)$ ، مجموعه‌های فازی در  $V$  می‌باشند. کامل بودن مجموعه قواعد را بررسی کنید.

- IF  $x_1$  is  $S_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^1$   
 IF  $x_1$  is  $S_1$  and  $x_2$  is  $L_2$ , THEN  $y$  is  $B^2$   
 IF  $x_1$  is  $M_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^3$   
 IF  $x_1$  is  $M_1$  and  $x_2$  is  $L_2$ , THEN  $y$  is  $B^4$   
 IF  $x_1$  is  $L_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^5$   
 IF  $x_1$  is  $L_1$  and  $x_2$  is  $L_2$ , THEN  $y$  is  $B^6$

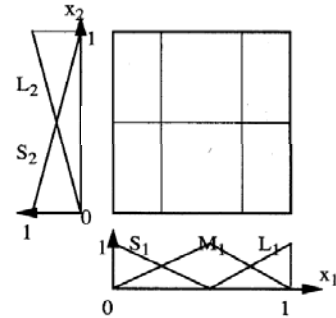


بخش مقدم این قواعد، تمام ترکیب‌های ممکن  $S_1$ ،  $M_1$  و  $L_1$  با  $S_2$  و  $L_2$  را پوشش می‌دهد.

### مثال ۱:

سیستم فازی ۲- ورودی ۱- خروجی با  $U=U_1 \times U_2 = [0,1] \times [0,1]$  و  $V=[0,1]$  را در نظر بگیرید. سه مجموعه‌ی فازی  $S_1$ ،  $M_1$  و  $L_1$  در  $U_1$  و دو مجموعه‌ی فازی  $S_2$  و  $L_2$  در  $U_2$  مطابق شکل زیر تعریف شده‌اند. مجموعه فازی شامل ۵ قاعده‌ی زیر است که در آن  $B^l (l=1,2,\dots,5)$ ، مجموعه‌های فازی در  $V$  می‌باشند. کامل بودن مجموعه قواعد را بررسی کنید.

- IF  $x_1$  is  $S_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^1$   
 IF  $x_1$  is  $S_1$  and  $x_2$  is  $L_2$ , THEN  $y$  is  $B^2$   
 IF  $x_1$  is  $M_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^3$   
 IF  $x_1$  is  $M_1$  and  $x_2$  is  $L_2$ , THEN  $y$  is  $B^4$   
 IF  $x_1$  is  $L_1$  and  $x_2$  is  $S_2$ , THEN  $y$  is  $B^5$



$x^*=(1,1)$

### پیوسته بودن مجموعه قواعد:

مجموعه قواعد اگر - آنگاه فازی را پیوسته گوئیم اگر قواعد فازی مجاور دارای اشتراک در بخش مقدم خود باشند.

به طور شهودی، پیوسته بودن مجموعه قواعد به مفهوم هموار بودن رفتار سیستم فازی است.

### سازگار بودن مجموعه قواعد:

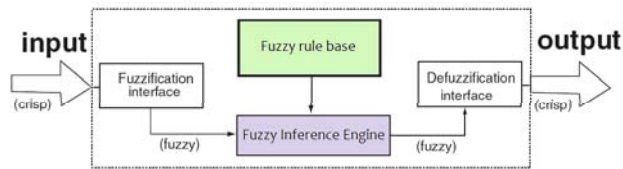
مجموعه قواعد اگر - آنگاه فازی را سازگار گوئیم اگر فاقد قاعده‌هایی با مقدم یکسان و تالی متفاوت باشد.

به طور شهودی، سازگار بودن مجموعه قواعد به مفهوم عدم تضاد قواعد می‌باشد.

اگرچه سازگار بودن برای مجموعه قواعد غیرفازی ضروری است ولی برای مجموعه قواعد فازی چنین ضرورتی وجود ندارد.



## موتور استنتاج فازی:



- موتور استنتاج فازی، بخشی از سیستم فازی است که مجموعه قواعد فازی موجود در پایگاه قواعد را بر اساس اصول منطق فازی ترکیب می‌کند تا نگاهی از مجموعه‌ی فازی  $A'$  در  $U$  به مجموعه فازی  $B'$  در  $V$  فراهم نماید.

## موتور استنتاج فازی:

- اگر پایگاه قواعد شامل تنها یک قاعده باشد:
- می‌توان از استنتاج GMP برای این منظور بهره گرفت.
- اگر پایگاه قواعد شامل بیش از یک قاعده باشد:
- استنتاج مبتنی بر ترکیب
- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد

### واژه‌نامه

composition based inference	استنتاج مبتنی بر ترکیب
individual-rule based inference	استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد

## استنتاج مبتنی بر ترکیب:

در این روش، ابتدا تمام قواعد موجود در پایگاه قواعد فازی به فرم یک رابطه‌ی فازی در  $U \times V$  ترکیب می‌شوند.

شیوه‌های ترکیب قواعد:

- ترکیب با استفاده از اجتماع (اگر قواعد بیانگر شرایط مستقل باشند).
- ترکیب با استفاده از اشتراک (اگر قواعد بیانگر شرایط وابسته به هم باشند).

## استنتاج مبتنی بر ترکیب:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

- تعیین تابع عضویت برای رابطه فازی  $A_1^l \times \dots \times A_n^l$  در  $U = U_1 \times \dots \times U_n$
- تعیین تابع عضویت قاعده بر اساس یکی از استلزام‌ها:
 
$$\mu_{A_1^l \times \dots \times A_n^l}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{A_n^l}(x_n)$$
- تعیین تابع عضویت رابطه‌ی فازی مربوط به ترکیب  $M$  قاعده:
 
$$Q_M = \bigcup_{l=1}^M Ru^{(l)}$$

ترکیب به شیوه‌ی اجتماع (ترکیب Mamdani):

$$\mu_{Q_M}(x, y) = \mu_{Ru^{(1)}}(x, y) + \dots + \mu_{Ru^{(M)}}(x, y)$$
- ترکیب به شیوه‌ی اشتراک (ترکیب Godel):
 
$$Q_G = \bigcap_{l=1}^M Ru^{(l)}$$

ترکیب به شیوه‌ی اشتراک (ترکیب Godel):

$$\mu_{Q_G}(x, y) = \mu_{Ru^{(1)}}(x, y) * \dots * \mu_{Ru^{(M)}}(x, y)$$

استنتاج با استفاده از GMP و مجموعه‌ی فازی دلخواه  $A'$  در  $U$ :

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} t [\mu_{A'}(x), \mu_{Q_M}(x, y)] \quad (\text{ترکیب Mamdani})$$

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} t [\mu_{A'}(x), \mu_{Q_G}(x, y)] \quad (\text{ترکیب Godel})$$

## تنوع موتورهای استنتاج:

- استنتاج‌ها:
  - استنتاج مبتنی بر ترکیب
  - استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد
- استلزام‌ها:
  - استلزام Dienes Rescher
  - استلزام Lukasiewicz
  - استلزام Zadeh
  - استلزام Godel
  - استلزام Mamdani (مینیمم و ضرب)
- $t$ -norm و  $s$ -norm

○ شیوه‌های ترکیب:

ترکیب Mamdani

ترکیب Godel

## استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد:

$Ru^{(l)}$ : IF  $x_1$  is  $A_1^l$  and ... and  $x_n$  is  $A_n^l$ , THEN  $y$  is  $B^l$

○ تعیین تابع عضویت برای رابطه فازی  $A_1^l \times \dots \times A_n^l$  در  $U = U_1 \times \dots \times U_n$ :

$$\mu_{A_1^l \times \dots \times A_n^l}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{A_n^l}(x_n)$$

○ تعیین تابع عضویت قاعده بر اساس یکی از استلزام‌ها:

○ استنتاج با استفاده از GMP و مجموعه‌ی فازی  $A^l$  در  $U$  برای هر قاعده و

تعیین مجموعه‌ی فازی  $B^l$  در  $V$ :

$$\mu_{B^l}(y) = \sup_{x \in U} t[\mu_{A^l}(x), \mu_{Ru^{(l)}}(x, y)] \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, M$$

○ تعیین خروجی موتور استنتاج فازی با ترکیب  $M$  مجموعه فازی  $\{B_1^l, \dots, B_M^l\}$ :

ترکیب به شیوه‌ی اجتماع:  $\mu_{B^l}(y) = \mu_{B_1^l}(y) \dot{+} \dots \dot{+} \mu_{B_M^l}(y)$

ترکیب به شیوه‌ی اشتراک:  $\mu_{B^l}(y) = \mu_{B_1^l}(y) * \dots * \mu_{B_M^l}(y)$

## مطالعه‌ی برخی موتورهای استنتاج فازی:

- موتور استنتاج ضرب
- موتور استنتاج مینیمم
- موتور استنتاج Lukasiewicz
- موتور استنتاج Zadeh
- موتور استنتاج Dienes-Rescher

موتورهای استنتاج ضرب و مینیمم، به واسطه‌ی سادگی محاسباتی، پرکاربردترین موتورهای استنتاج در سیستم‌های فازی و کنترل فازی هستند.



## معیارهای انتخاب از میان انواع موتورهای استنتاج:

- خواسته‌های شهودی
- کارایی محاسباتی
- ویژگی‌های خاص

### موتور استنتاج ضرب (Product Inference Engine):

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اجتماع
- استلزام ضرب Mamani
- ضرب جبری برای تمام t-normها و ماکزیمم برای تمام s-normها

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i'}(x_i) \mu_{B_i'}(y) \right) \right]$$

### موتور استنتاج مینیمم (Minimum Inference Engine):

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اجتماع
- استلزام مینیمم Mamdani
- مینیمم برای تمام t-normها و ماکزیمم برای تمام s-normها

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \mu_{A_1'}(x_1), \dots, \mu_{A_n'}(x_n), \mu_{B_i'}(y) \right) \right]$$

### موتور استنتاج Lukasiewicz:

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اشتراک
- استلزام Lukasiewicz
- مینیمم برای تمام t-normها

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \mu_{Ru(t)}(x, y) \right) \right] \\ &= \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \min \left( 1, 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i'}(x_i) \right) + \mu_{B_i'}(y) \right) \right) \right] \\ &= \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i'}(x_i) \right) + \mu_{B_i'}(y) \right) \right] \end{aligned}$$

### موتور استنتاج Zadeh:

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اشتراک
- استلزام Zadeh
- مینیمم برای تمام t-normها

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( \min \left( \mu_{A_1'}(x_1), \dots, \mu_{A_n'}(x_n) \right), \mu_{B_i'}(y) \right) \right) \right]$$

## ویژگی های موتورهای استنتاج:

- در موتور استنتاج ضرب، اگر «استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اجتماع» با «استنتاج مبتنی بر ترکیب با ترکیب Mamdani» جایگزین گردد موتور استنتاج تغییری نخواهد کرد.

### یادآوری موتور استنتاج ضرب:

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اجتماع
  - استلزام ضرب Mamani
  - ضرب جبری برای تمام t-norm ها و ماکزیمیم برای تمام s-norm ها
- $$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$
- $$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \max_{l=1:M} [\mu_{R_{ul}}(x, y)] \right)$$
- $$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right] \right)$$
- $$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in U} \left( \max_{l=1:M} \left[ \mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right] \right)$$

## موتور استنتاج Dienes-Rescher:

- استنتاج مبتنی بر تک تک قواعد با ترکیب اشتراک
- استلزام Dienes-Rescher
- مینیمیم برای تمام t-norm ها

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

## ویژگی های موتورهای استنتاج:

- اگر مجموعه‌ی فازی A' یک singleton فازی باشد موتور استنتاج ضرب به

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x^* \in U$$

صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

### یادآوری موتور استنتاج ضرب:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \left( \mu_{A'}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right]$$

## ویژگی های موتورهای استنتاج:

- اگر مجموعه‌ی فازی A' یک singleton فازی باشد موتور استنتاج مینیمیم به

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x^* \in U$$

صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

### یادآوری موتور استنتاج مینیمیم:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$



### ویژگی های موتورهای استنتاج:

◦ اگر مجموعه‌ی فازی A' یک singleton فازی باشد موتور استنتاج Zadeh به

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x^* \in U$$

صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

یادآوری:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( \min \left( \mu_{A_1^l}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n^l}(x_n^*) \right), \mu_{B^l}(y) \right), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right) \right]$$

### ویژگی های موتورهای استنتاج:

◦ اگر مجموعه‌ی فازی A' یک singleton فازی باشد موتور استنتاج

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x^* \in U$$

Lukasiewicz به صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

یادآوری:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right) + \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ 1, 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right) + \mu_{B^l}(y) \right]$$

### ویژگی های موتورهای استنتاج:

◦ اگر به ازای یک مقدار  $x \in U$ ، خیلی کوچک شود،  $\mu_{A_i^l}(x)$  حاصل از

موتور استنتاج ضرب و موتور استنتاج مینیمم بسیار کوچک خواهد بود که این موضوع مشکلاتی را در پیاده سازی در پی خواهد داشت. این مشکل در سه موتور استنتاج دیگر وجود ندارد.

### ویژگی های موتورهای استنتاج:

◦ اگر مجموعه‌ی فازی A' یک singleton فازی باشد موتور استنتاج Dienes-

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x^* \in U$$

Rescher به صورت زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \sup_{x \in U} \min \left( \mu_{A'}(x), \max \left( 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right) \right]$$

یادآوری:

$$\xrightarrow{\text{yields}} \mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( 1 - \min_{i=1:n} \left( \mu_{A_i^l}(x_i^*) \right), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$



**مثال:**

فرض کنید پایگاه قواعد فازی در یک سیستم فازی تنها شامل یک قاعدهی زیر

**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

باشد:

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن،

اگر مجموعهی فازی  $A'$  یک singleton فازی باشد  $\mu_{B'}(y)$  را با استفاده از هر یک از موتورهای استنتاج زیر تعیین نمایید. فرض کنید:

$$\min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

الف: موتور استنتاج ضرب

ب: موتور استنتاج مینیمم

ج: موتور استنتاج Lukasiewicz

د: موتور استنتاج Zadeh

ج: موتور استنتاج Dienes-Rescher

**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

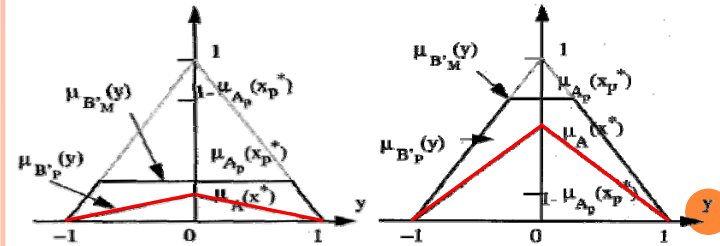
$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

**حل الف:**

موتور استنتاج ضرب

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{B'}(y) \right]$$

yields  $\mu_{B'}(y) = \mu_A(x^*) \mu_B(y)$



**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

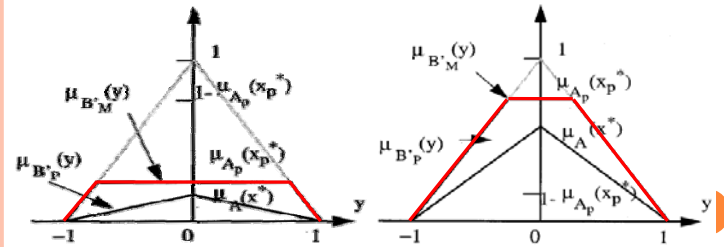
$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

**حل ب:**

موتور استنتاج مینیمم

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \min(\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*), \mu_{B'}(y)) \right]$$

yields  $\mu_{B'}(y) = \min[\mu_{A_p}(x_p^*), \mu_B(y)]$



**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

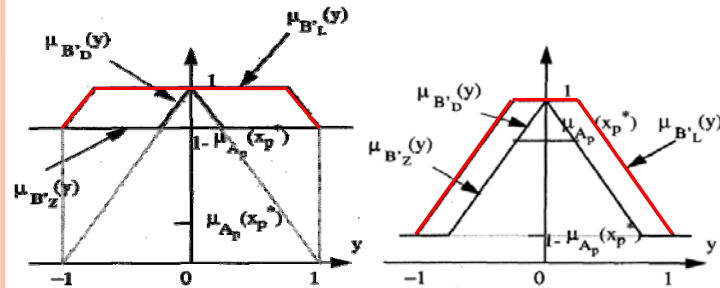
$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

**حل ج:**

موتور استنتاج Lukasiewicz

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ 1, 1 - \min(\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)) + \mu_{B'}(y) \right]$$

yields  $\mu_{B'}(y) = \min[1, 1 - \mu_{A_p}(x_p^*) + \mu_B(y)]$



**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

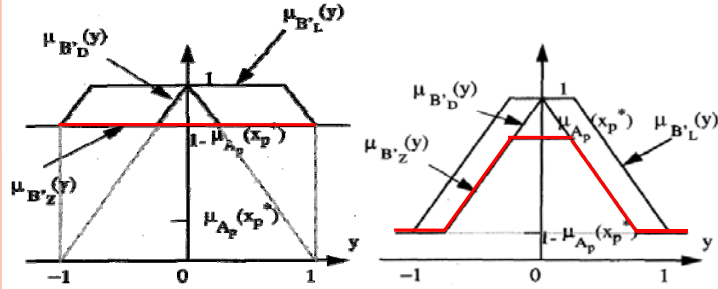
$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

حل د:

د: موتور استنتاج Zadeh

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( \min(\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_l}(x_l^*), \mu_{B^l}(y)), 1 - \min_{i=1:n}(\mu_{A_i}(x_i^*)) \right) \right]$$

yields  $\mu_{B'}(y) = \max(\min(\mu_{A_p}(x_p^*), \mu_B(y)), 1 - \mu_{A_p}(x_p^*))$



**Ru:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \min[\mu_{A_1}(x_1^*), \dots, \mu_{A_n}(x_n^*)] = \mu_{A_p}(x_p^*)$$

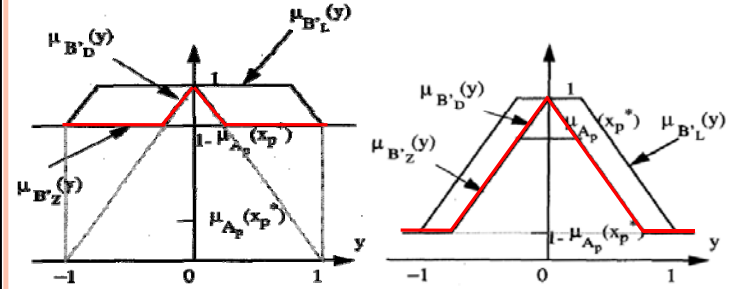
$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

حل د:

د: موتور استنتاج Dienes-Rescher

$$\mu_{B'}(y) = \min_{l=1:M} \left[ \max \left( 1 - \min_{i=1:n}(\mu_{A_i}(x_i^*)), \mu_{B^l}(y) \right) \right]$$

yields  $\mu_{B'}(y) = \max(1 - \mu_{A_p}(x_p^*), \mu_B(y))$



### جمع بندی مثال:

- اگر مقدار عضویت مقدم قاعده در نقطه‌ی  $x^*$  کوچک باشد موتورهای استنتاج ضرب و مینیمم به مقادیر عضویت بسیار کوچکی منجر خواهد شد در حالی که مقادیر عضویت حاصل از موتورهای استنتاج Zadeh ، Lukasiewicz و Dienes-Rescher بسیار بزرگ خواهد بود.
- موتورهای استنتاج ضرب و مینیمم مشابه هستند و موتورهای استنتاج Zadeh ، Lukasiewicz و Dienes-Rescher نیز مشابه هستند در حالی که این دو گروه کاملاً متفاوت از یکدیگر می باشند.
- موتور استنتاج Lukasiewicz به بزرگترین تابع عضویت خروجی منجر می گردد در حالی که موتور استنتاج ضرب، کوچکترین تابع عضویت خروجی را ایجاد می کند.

### مثال:

فرض کنید پایگاه قواعد فازی در یک سیستم فازی شامل دو قاعده‌ی زیر باشد:

**Ru<sup>(1)</sup>:** IF  $x_1$  is  $A_1$  and ... and  $x_n$  is  $A_n$ , THEN  $y$  is  $B$

**Ru<sup>(2)</sup>:** IF  $x_1$  is  $C_1$  and ... and  $x_n$  is  $C_n$ , THEN  $y$  is  $D$

که در آن،

$$\mu_B(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \text{if } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_D(y) = \begin{cases} 1 - |y - 1| & \text{if } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اگر مجموعه‌ی فازی  $A'$  یک singleton فازی باشد  $\mu_{B'}(y)$  را با استفاده از موتور استنتاج ضرب تعیین نمایید. فرض کنید:

$$\prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) = \mu_A(x^*)$$

$$\prod_{i=1}^n \mu_{C_i}(x_i^*) = \mu_C(x^*)$$

$$\mu_{B'}(y) = \max_{l=1:M} \left[ \prod_{i=1}^n \mu_{A_i}(x_i^*) \mu_{B^l}(y) \right]$$

