هرکه گوید جمله حق است احمقی است

آن که گوید جمله باطل او شقی است

سیستم های فازی

5

Presented By: A. Maleki

Spring 2010

دستورکار این جلسه: رابطه های فازی

- ضرب کارتزین
- رابطه‌ی کلاسیک
- رابطه‌ی فازی
- تصویر کردن و گسترش استوانه ای روابط
- ترکیب روابط تُرد
- ترکیب روابط فازی
- اصل توسعه

ضرب کارتزین (cartesian product):

- دو مجموعه‌ی غیرفازی U و V را در نظر بگیرید. ضرب کارتزین این دو مجموعه که با U×V نشان داده می‌شود مجموعه‌ای غیرفازی شامل زوج‌های مرتب (u,v) است که u∈U و v∈V می‌باشد.

U, V: crisp sets

$$U \times V = \{(u,v) | u \in U, v \in V\}$$

- توجه کنید که ترتیب اعضای زوج‌های مرتب اهمیت دارد؛ به عبارت دیگر،

$$if\ U \neq V \rightarrow \ U \times V \neq V \times U$$

- حالت کلی تر: ضرب کارتزین چند مجموعه ی فازی:

$U_1, U_2, \cdots, U_n$: crisp sets

$$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \cdots, u_n \in U_n\}$$

واژه‌نامه

ordered pair	زوج مرتب
ordered n-tuple	n-تایی مرتب

رابطه‌ها را می‌توان بر اساس این که بین چند مجموعه برقرار است به صورت زیر تقسیم‌بندی نمود:

- رابطه‌ی دوگانه (binary relation)
- رابطه‌ی سه‌گانه (ternary relation)
- رابطه‌ی چهارگانه (quaternary relation)
- رابطه‌ی پنج‌گانه (quinary relation)

رابطه‌ی کلاسیک (classic relation):

- رابطه‌های کلاسیک بیانگر نگاشتی بین مجموعه‌های غیرفازی می‌باشند به نحوی که دو عضو این مجموعه‌ها یا کاملا مرتبط‌اند یا کاملا غیرمرتبط.
- رابطه‌ی کلاسیک بین مجموعه‌های غیرفازی U_1 ، U_2 ، ... و U_n به صورت $Q(U_1,U_2,...,U_n)$ نشان داده می‌شود و زیرمجموعه‌ای از ضرب کارتزین این مجموعه‌ها است.

$$Q(U_1,U_2,\cdots,U_n) \subset U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$$

- تابع عضویت برای رابطه‌ی کلاسیک:

$$\mu_Q(u_1,\cdots,u_n) = \begin{cases} 1 & if\ (u_1,\cdots,u_n) \in Q(U_1,\cdots,U_n) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- ماتریس رابطه: ماتریسی n- بعدی شامل مقادیر عضویت رابطه.

مثال ۲:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ای بین مجموعه‌های غیرفازی A و B باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

A = { Iran , India , US , Canada }

B = { Persian , Hindi , English , Arabic }

R(a,b) ={ (Iran , Persian) , (India , Hindi) , (US , English) , (Canada , English) }

Relation	Iran	India	US	Canada
Persian	1	0	0	0
Hindi	0	1	0	0
English	0	0	1	1
Arabic	0	0	0	0

مثال ۱:

مجموعه‌های غیرفازی A={1,2,3} ، B={3,4,5} و C={8,9} را در نظر بگیرید.

الف: ضرب کارتزین این سه مجموعه یعنی A×B ×C را به دست آورید.

ب: در حالت کلی، چه رابطه ای بین تعداد اعضای ضرب کارتزین مجموعه‌ها و تعداد اعضای آنها وجود دارد؟

A×B × C={ (1,3,8) , (1,3,9) , (1,4,8) , (1,4,9) , (1,5,8) , (1,5,9),
(2,3,8) , (2,3,9) , (2,4,8) , (2,4,9) , (2,5,8) , (2,5,9),
(3,3,8) , (3,3,9) , (3,4,8) , (3,4,9) , (3,5,8) , (3,5,9) }

رابطه‌ی فازی (fuzzy relation):

- رابطه‌ای که مقدار تعلق آن می‌تواند هر مقداری در محدوده‌ی [0,1] باشد.

به عبارت دیگر،

- رابطه‌ی فازی یک مجموعه‌ی فازی در فضای ضرب کارتزین مجموعه‌های تُرد است یعنی

$U_1, U_2, \cdots, U_n$: *crisp sets*

$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$: *cartesian product*

$$Q = \left\{ \left((u_1, \cdots, u_n), \mu_Q(u_1, \cdots, u_n) \right) \middle| (u_1, \cdots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \right\}$$

$$, \qquad \mu_Q(u_1, \cdots, u_n) \in [0,1]$$

مثال۱:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ی فازی «خیلی دور» بین مجموعه‌های A و B در مجموعه‌ی مرجع شهرهای ایران باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

A = { Tabriz, Tehran , Shahrood}

B = { Mashhad , Semnan }

Relation	Tabriz	Tehran	Shahrood
Mashhad	1	0.6	0.3
Semnan	0.8	0.2	0.15

مثال۲:

فرض کنید R رابطه‌ی دوگانه‌ی فازی «رنگ- رسیده بودن» بین مجموعه‌های A (رنگ) و B (رسیده بودن) باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

A = { Green, Yellow, Red}

B = { Unripe, Semi-ripe, Ripe }

Relation	Green	Yellow	Red
Unripe	1	0.6	0
Semi-ripe	0.3	1	0.4
Ripe	0	0.2	1

مثال۳:

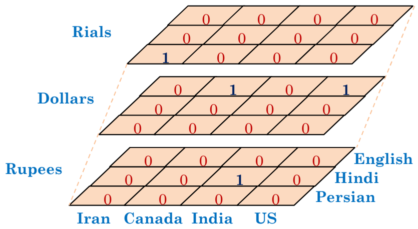
فرض کنید R رابطه‌ی سه‌گانه‌ای بین مجموعه‌های غیرفازی A ، B و C باشد. ماتریس رابطه را برای R بنویسید.

A = { Iran , Canada , India , US}

B = { Persian , Hindi , English }

C = { Rupees , Dollar , Rial }

R(a,b,c) ={ (Iran , Persian , Rial) , (Canada , English , Dollar) , (India , Hindi , Rupees) , (US , English , Dollar) }



مثال۳:

فرض کنید U و V مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی U=V=R .

الف: رابطه‌ی فازی « x تقریبا برابر y » را می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف نمود.

$$\mu_{AE}(x,y) = e^{-(x-y)^2}$$

ب: رابطه‌ی فازی « x بسیار بزرگ تر از y » را می‌توان با تابع عضویت زیر تعریف نمود.

$$\mu_{ML}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$$

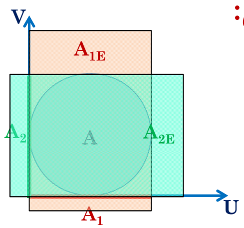
تصویر کردن و گسترش استوانه‌ای روابط:

- یادآوری مفاهیم در حالت غیرفازی در قالب یک مثال
- تصویر کردن روابط فازی دوگانه (حالت خاص)
- تصویر کردن روابط فازی (حالت کلی)
- گسترش استوانه ای روابط
- ضرب کارتزین مجموعه های فازی و ...

واژه‌نامه

projection	تصویر کردن
cylindric extension	گسترش استوانه‌ای

یادآوری مفاهیم در حالت غیرفازی:



$A_1 = [0,2] \subset U$

$A_2 = [0,2] \subset V$

$A_{1E} = [0,2] \times (-\infty, +\infty)$

$A_{2E} = (-\infty, +\infty) \times [0,2]$

مثال۱:

برای مجموعه‌ی غیرفازی A که نشانگر رابطه‌ای در فضای $U \times V = R^2$ است موارد زیر را تعیین نمایید.

$$A = \{ (x,y) \in R^2 \mid (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1 \}$$

الف: تصویر A بر U یا A_1 .

ب: تصویر A بر V یا A_2 .

ج: گسترش استوانه‌ای A_1 به $U \times V$ یا A_{1E} .

د: گسترش استوانه‌ای A_2 به $U \times V$ یا A_{2E} .

تصویرکردن روابط فازی دوگانه (حالت خاص) :

- فرض کنید Q رابطه‌ی فازی دوگانه‌ای در $U \times V$ باشد. تصویر Q بر U که با Q_1 نشان داده می شود مجموعه ای فازی در U با تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{Q_1}(x) = \max_{y \in V} \mu_Q(x,y)$$

گسترش استوانه‌ای روابط فازی :

- فرض کنید Q_P رابطه‌ای فازی در $Ui_1 \times \dots \times Ui_k$ و $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ زیرمجموعه ای از $\{1,2,\dots,n\}$ باشد. گسترش استوانه ای Q_P به $U_1\times \dots \times U_n$ ، رابطه‌ی فازی Q_P در $U_1\times \dots \times U_n$ است که با تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{Q_{PE}}(u_1,\cdots,u_n)=\mu_{Q_P}(u_{i_1},\cdots,u_{i_k})$$

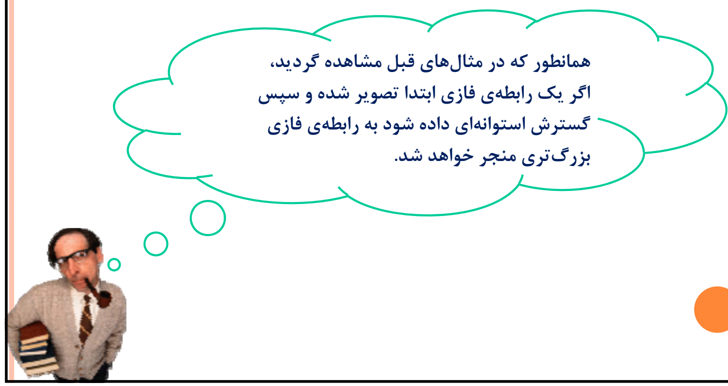
تصویرکردن روابط فازی (حالت کلی) :

- فرض کنید Q رابطه‌ای فازی در $U_1\times U_2\times \dots \times U_n$ و $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ زیرمجموعه‌ای از $\{1,2,\dots,n\}$ باشد. تصویر Q بر $Ui_1\times Ui_2\times\dots\times Ui_k$ ، رابطه‌ی فازی Q_P در $Ui_1\times Ui_2\times\dots\times Ui_k$ است که با تابع عضویت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu_{Q_P}(u_{i_1},\cdots,u_{i_k})=\max_{u_{j_1}\in U_{j_1},\dots,u_{j_{(n-k)}}\in U_{j_{(n-k)}}}\mu_Q(u_1,\cdots,u_n)$$

که $\{u_{j1},\dots,u_{j(n-k)}\}$ مکمل $\{u_{i1},\dots,u_{ik}\}$ نسبت به $\{u_1,\dots,u_n\}$ است.

توجه!



مثال:

فرض کنید U و V مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی U=V=R. رابطه‌ی فازی « x تقریبا برابر y » یا AE در U×V با تابع عضویت داده شده را در نظر بگیرید.

$$\mu_{AE}(x,y)=e^{-(x-y)^2}$$

الف: تصویر رابطه‌ی AE بر U یا A_{E1} .

ب: تصویر رابطه‌ی AE بر V یا A_{E2} .

ج: گسترش استوانه‌ای A_{E1} به U×V .

د: گسترش استوانه‌ای A_{E2} به U×V .

$$\mu_{AE_1}(x)=\max_{y\in V} e^{-(x-y)^2}=1 \rightarrow AE_1=\int_U \frac{1}{x}$$

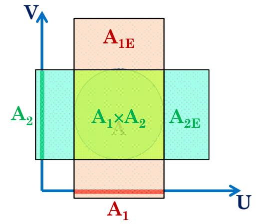
$$\mu_{AE_2}(y)=\max_{x\in U} e^{-(x-y)^2}=1 \rightarrow AE_2=\int_V \frac{1}{y}$$

$$AE_{1E}=\int_{U\times V}\frac{1}{(x,y)}=U\times V \qquad AE_{2E}=\int_{U\times V}\frac{1}{(x,y)}=U\times V$$

توجه!

- اگر Q رابطه‌ای فازی در $U_1\times \dots \times U_n$ و Q_1 ، Q_2 ، ... ، Q_n به ترتیب تصویر آن بر U_1 ، U_2 ، ... ، U_n باشند آنگاه $Q \subset Q_1\times \dots \times Q_n$

مثال۱:
مجموعه‌ی غیرفازی A که نشانگر رابطه‌ای در فضای $U\times V=R^2$ است را در نظر بگیرید.



ضرب کارتزین مجموعه‌های فازی:

- فرض کنید A_1 ، A_2 ، ... ، A_n مجموعه‌هایی فازی به ترتیب در U_1 ، U_2 ، ... ، U_n باشند. ضرب کارتزین این مجموعه‌های فازی که با $A_1\times A_2\times \dots \times A_n$ نشان داده می‌شود رابطه‌ای فازی در $U_1\times \dots \times U_n$ با تابع عضویت زیر است که در آن t(.) نشانگر t-norm می‌باشد.

$$\mu_{A_1\times A_2\times\cdots\times A_n}(u_1,\cdots,u_n) = t\left(\mu_{A_1}(u_1),\cdots,\mu_{A_n}(u_n)\right)$$

ترکیب روابط:

- PoQ ترکیب روابط P(U,V) و Q(V,W) است اگر و فقط اگر برای هر $(x,z)\in U\times W$ داشته باشیم:

$$\mu_{PoQ}(x,z) = \max_{y\in V} t[\mu_P(x,y),\mu_Q(y,z)]$$

که t(.) نشانگر t-norm است.

در این توصیف، به فازی یا تُرد بودن اشاره‌ای نشده است و برای هر دو حالت معتبر است.

ترکیب روابط باینری تُرد:

- فرض کنید P(U,V) و Q(V,W) دو رابطه ی باینری تُرد باشند که در مجموعه‌ی V اشتراک دارند. ترکیب P و Q که با PoQ نشان داده می‌شود به صورت رابطه‌ای در $U\times W$ تعریف می‌گردد که $(x,z)\in PoQ$ اگر و فقط اگر بتوان $y\in V$یی یافت که $(x,y)\in P$ و $(y,z)\in Q$ باشد.

ترکیب روابط فازی:

- در ترکیب روابط فازی، از آنجا که گزینه‌های متنوعی برای t-norm وجود دارد ترکیب روابط فازی نیز متنوع خواهد بود که از آن جمله می‌توان به max-min و max-product اشاره نمود.

ترکیب max-min روابط فازی:

- ترکیب max-min روابط فازی P(U,V) و Q(V,W) ، یک رابطه ی فازی PoQ در U×W با تابع عضویت زیر است که U×W ∋(x,z) می باشد.

$$\mu_{PoQ}(x,z) = \max_{y \in V} min[\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)]$$

ترکیب max-product روابط فازی:

- ترکیب max-product روابط فازی P(U,V) و Q(V,W) ، یک رابطه ی فازی PoQ در U×W با تابع عضویت زیر است که U×W ∋(x,z) می باشد.

$$\mu_{PoQ}(x,z) = \max_{y \in V} [\mu_P(x,y).\mu_Q(y,z)]$$

مثال:

برای روابط فازی R و S داده شده، رابطه‌ی T=RoS را به روش‌های ترکیب max-min و max-product تعیین نمایید.

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.8 & 0.3 \end{bmatrix} \end{array} \qquad S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال:

برای روابط فازی S و R داده شده، رابطه‌ی T=RoS را به روش‌های ترکیب max-min و **max-product** تعیین نمایید.

$$R = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.7 & 0.6 \\ x_2 & 0.8 & 0.3 \end{array} \qquad S = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ y_2 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \end{array}$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_1) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.7\times 0.8, 0.6\times 0.1\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.56, 0.06\} = 0.56$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_2) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.7\times 0.5, 0.6\times 0.6\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.35, 0.36\} = 0.36$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_3) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.7\times 0.4, 0.6\times 0.7\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.28, 0.42\} = 0.42$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_1) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.8\times 0.8, 0.3\times 0.1\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.64, 0.03\} = 0.64$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_2) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.8\times 0.5, 0.3\times 0.6\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.40, 0.18\} = 0.40$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_3) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.8\times 0.4, 0.3\times 0.7\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.32, 0.21\} = 0.32$$

$$T = RoS = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & & & \\ x_2 & & & \end{array}$$

مثال:

برای روابط فازی S و R داده شده، رابطه‌ی T=RoS را به روش‌های ترکیب **max-min** و max-product تعیین نمایید.

$$R = \begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & 0.7 & 0.6 \\ x_2 & 0.8 & 0.3 \end{array} \qquad S = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline y_1 & 0.8 & 0.5 & 0.4 \\ y_2 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \end{array}$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_1) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.7,0.8), \min(0.6,0.1)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.7, 0.1\} = 0.7$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_2) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.7,0.5), \min(0.6,0.6)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.5, 0.6\} = 0.6$$

$$\mu_{RoS}(x_1,z_3) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.7,0.4), \min(0.6,0.7)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.4, 0.6\} = 0.6$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_1) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.8,0.8), \min(0.3,0.1)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.8, 0.1\} = 0.8$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_2) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.8,0.5), \min(0.3,0.6)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.5, 0.3\} = 0.5$$

$$\mu_{RoS}(x_2,z_3) = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{\min(0.8,0.4), \min(0.3,0.7)\} = \max_{y\in\{y_1,y_2\}}\{0.4, 0.3\} = 0.4$$

$$T = RoS = \begin{array}{c|ccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ \hline x_1 & & & \\ x_2 & & & \end{array}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

مجموعه‌های مرجع U_1، U_2، U_3 و U_4 و همچنین رابطه‌ی Q که در فضای ضرب کارتزین $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. موارد خواسته شده را به دست آورید.

$U_1=\{a,b,c\}$ $U_2=\{s,t\}$ $U_3=\{x,y\}$ $U_4=\{i,j\}$

$$Q = \frac{0.4}{(b,t,y,i)} + \frac{0.6}{(a,s,x,i)} + \frac{0.9}{(b,s,y,i)} + \frac{1}{(b,s,y,j)} + \frac{0.6}{(a,t,y,j)} + \frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

- الف: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1\times U_2\times U_4$
- ب: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1\times U_3$
- ج: تصویر رابطه‌ی Q بر U_4
- د: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند الف به فضای $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$
- ه: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ب به فضای $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$
- و: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ج به فضای $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$

مثال:

فرض کنید U، V و W مجموعه اعداد حقیقی باشند یعنی U=V=W=R. برای روابط فازی AE « تقریبا برابر » و ML یا « بسیار بزرگ‌تر از» داده شده، ترکیب AEoML را به روش ترکیب max-product تعیین نمایید.

$$\mu_{AE}(x,y) = e^{-(x-y)^2}$$

$$\mu_{ML}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-(x-y)}}$$

$$\mu_{AEoML}(x,z) = \max_{y\in R}\left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-(x-y)^2}}{1+e^{-(y-z)}}\right] = 0$$

$$y = ? \quad \rightarrow \quad \mu_{AEoML}(x,z) = ?$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

- الف: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_2 \times U_4$

$$Projection\ of\ Q\ on\ U_1\times U_2\times U_4 = \frac{0.4}{(b,t,i)}+\frac{0.6}{(a,s,i)}+\frac{0.9}{(b,s,i)}+\frac{1}{(b,s,j)}+\frac{0.6}{(a,t,j)}+\frac{0.2}{(c,s,i)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

- ب: تصویر رابطه‌ی Q بر $U_1 \times U_3$

$$Projection\ of\ Q\ on\ U_1\times U_3 = \frac{max(0.4,0.9,1)}{(b,y)}+\frac{0.6}{(a,x)}+\frac{0.6}{(a,y)}+\frac{0.2}{(c,y)}$$
$$=\frac{1}{(b,y)}+\frac{0.6}{(a,x)}+\frac{0.6}{(a,y)}+\frac{0.2}{(c,y)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

- ج: تصویر رابطه‌ی Q بر U_4

$$Projection\ of\ Q\ on\ U_4 = \frac{max(0.4,0.6,0.9,0.2)}{i}+\frac{max(1,0.6)}{j}=\frac{0.9}{i}+\frac{1}{j}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\} \quad U_2=\{s,t\} \quad U_3=\{x,y\} \quad U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

$$Projection\ of\ Q\ on\ U_1\times U_2\times U_4 = \frac{0.4}{(b,t,i)}+\frac{0.6}{(a,s,i)}+\frac{0.9}{(b,s,i)}+\frac{1}{(b,s,j)}+\frac{0.6}{(a,t,j)}+\frac{0.2}{(c,s,i)}$$

- د: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند الف به فضای $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$

$$Cylinderic\ Expansion\ to\ U_1\times U_2\times U_3\times U_4 = \frac{0.4}{(b,t,x,i)}+\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.6}{(a,s,y,i)}+\frac{0.9}{(b,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}$$
$$+\frac{1}{(b,s,x,j)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,x,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,x,i)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\}$ $U_2=\{s,t\}$ $U_3=\{x,y\}$ $U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

$$\text{Projection of } Q \text{ on } U_1\times U_3$$

$$=\frac{max(0.4,0.9,1)}{(b,y)}+\frac{0.6}{(a,x)}+\frac{0.6}{(a,y)}+\frac{0.2}{(c,y)}$$

$$=\frac{1}{(b,y)}+\frac{0.6}{(a,x)}+\frac{0.6}{(a,y)}+\frac{0.2}{(c,y)}$$

- ه: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ب به فضای $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$

$$\text{Cylinderic Expansion to } U_1\times U_2\times U_3\times U_4$$

$$=\frac{1}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{1}{(b,t,y,i)}+\frac{1}{(b,t,y,j)}$$
$$+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,j)}+\frac{0.6}{(a,t,x,i)}+\frac{0.6}{(a,t,x,j)}$$
$$+\frac{0.6}{(a,s,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}$$
$$+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}+\frac{0.2}{(c,s,y,j)}+\frac{0.2}{(c,t,y,i)}+\frac{0.2}{(c,t,y,j)}$$

مثال (تمرین ۲-۴ کتاب):

$U_1=\{a,b,c\}$ $U_2=\{s,t\}$ $U_3=\{x,y\}$ $U_4=\{i,j\}$

$$Q=\frac{0.4}{(b,t,y,i)}+\frac{0.6}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{0.6}{(a,t,y,j)}+\frac{0.2}{(c,s,y,i)}$$

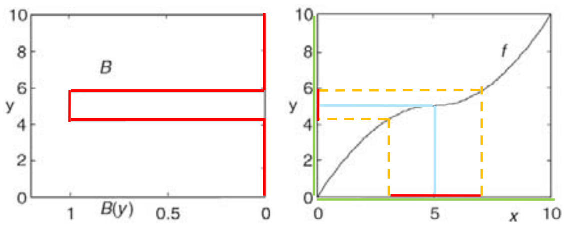
$$\text{Projection of } Q \text{ on } U_4=\frac{max(0.4,0.6,0.9,0.2)}{i}+\frac{max(1,0.6)}{j}=\frac{0.9}{i}+\frac{1}{j}$$

- و: گسترش استوانه‌ای رابطه‌ی حاصل از بند ج به فضای $U_1\times U_2\times U_3\times U_4$

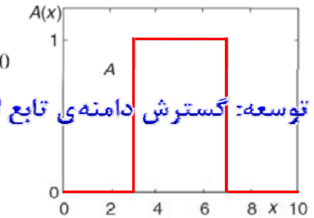
$$\text{Cylinderic Expansion to } U_1\times U_2\times U_3\times U_4$$

$$=\frac{0.9}{(a,s,x,i)}+\frac{0.9}{(a,s,y,i)}+\frac{0.9}{(a,t,x,i)}+\frac{0.9}{(a,t,y,i)}$$
$$+\frac{0.9}{(b,s,x,i)}+\frac{0.9}{(b,s,y,i)}+\frac{0.9}{(b,t,x,i)}+\frac{0.9}{(b,t,y,i)}$$
$$+\frac{0.9}{(c,s,x,i)}+\frac{0.9}{(c,s,y,i)}+\frac{0.9}{(c,t,x,i)}+\frac{0.9}{(c,t,y,i)}$$
$$+\frac{1}{(a,s,x,j)}+\frac{1}{(a,s,y,j)}+\frac{1}{(a,t,x,j)}+\frac{1}{(a,t,y,j)}$$
$$+\frac{1}{(b,s,x,j)}+\frac{1}{(b,s,y,j)}+\frac{1}{(b,t,x,j)}+\frac{1}{(b,t,y,j)}$$
$$+\frac{1}{(c,s,x,j)}+\frac{1}{(c,s,y,j)}+\frac{1}{(c,t,x,j)}+\frac{1}{(c,t,y,j)}$$

اصل توسعه (Extension Principle) :



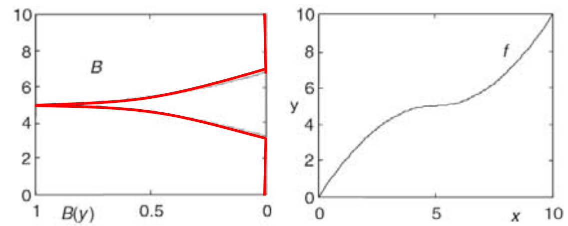
$$f(x)=\begin{cases}-0.2(x-5)^2+5, & \text{if } 0\le x\le 5\\ 0.2(x-5)^2+5, & \text{if } 5< x\le 10\end{cases}$$

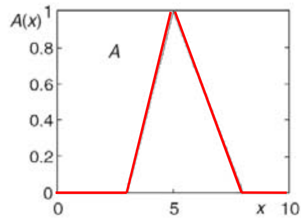


اصل توسعه: گسترش دامنه‌ی تابع از مقادیر تُرد به مجموعه‌های فازی

- تابع: نگاشت ترد
- اصل توسعه: نگاشت فازی

اصل توسعه (Extension Principle) :





- تابع: نگاشت ترد
- اصل توسعه: نگاشت فازی

مثال:

مجموعه‌ی U={1,2,...,10} و تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید. اگر small مجموعه‌ای فازی در U باشد، مجموعه‌ی تُرد V و مجموعه‌ی فازی $small^2$ را تعیین نمایید.

$$small=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.4}{5}$$

$$V=\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$$

$$small^2=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{0.8}{9}+\frac{0.6}{16}+\frac{0.4}{25}$$

اصل توسعه (Extension Principle) :

فرض کنید f: U→V تابعی از مجموعه‌ی تُرد U به مجموعه‌ی تُرد V باشد.

مجموعه‌ی فازی A در U داده شده است و می‌خواهیم مجموعه‌ی فازی B=f(A) در V را که توسط این تابع حاصل می‌گردد تعیین نماییم.

$f: U \to V \qquad U,V: crisp\ sets$

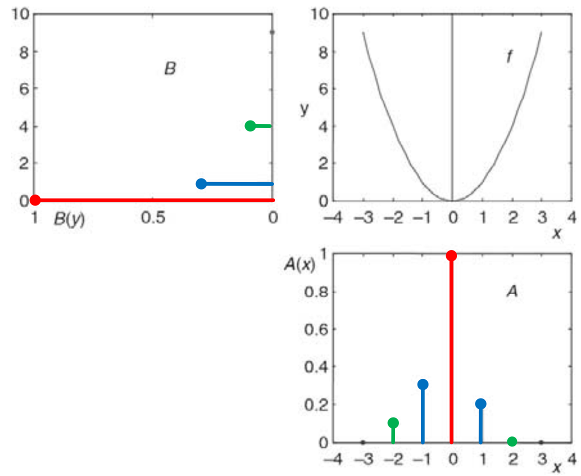
$A: a\ fuzzy\ set\ in\ U$

$B: a\ fuzzy\ set\ in\ V$

$if\ f\ is\ an\ one\ to\ one\ mapping: \quad \mu_B(y)=\mu_A[f^{-1}(y)]\ , y\epsilon V$

$otherwise: \quad \mu_B(y)=\max_{x\epsilon f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad , y\epsilon V$

مثال: مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل توسعه، مجموعه‌ی فازی B=f(A) را تعیین نمایید.



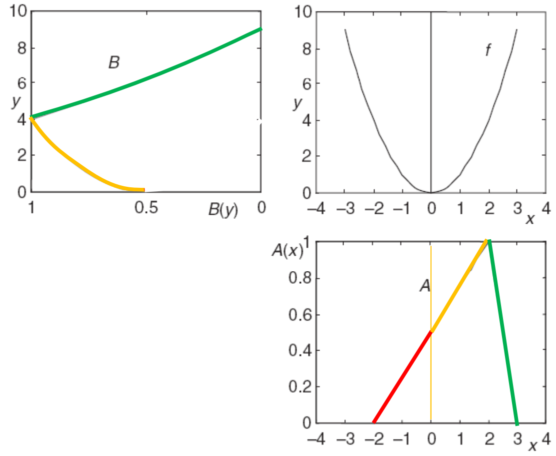
مثال:

مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2+1$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل توسعه، مجموعه‌ی فازی B=f(A) را تعیین نمایید.

$$A=\frac{0.2}{-2}+\frac{0.5}{-1}+\frac{0.7}{0}+\frac{0.9}{1}+\frac{0.4}{2}$$

$$B=\frac{max(0.2,0.4)}{5}+\frac{max(0.5,0.9)}{2}+\frac{0.7}{1}=\frac{0.4}{5}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{1}$$

مثال: مجموعه‌ی فازی A و تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید. بر اساس اصل توسعه، مجموعه‌ی فازی $B=f(A)$ را تعیین نمایید.



فرم کلی‌تر اصل توسعه :

QUESTIONS?