هرکه گوید جو حق است احمقی است
آن که گوید جو باطل، او شقی است

# سیستم های فازی

4

Presented By: A. Maleki
Spring 2010

---

## دستورکار این جلسه:

# عمل های مجموعه های فازی

- مقدمه
- مکمل فازی
- اجتماع فازی و s-norm
- اشتراک فازی و t-norm
- کلاس متناظر
- عمل‌های میانگین‌گیری
- جمع‌بندی

---

## مقدمه:

- برای مجموعه‌های کلاسیک، تنها یک نوع عمل برای مکمل، اجتماع و اشتراک قابل انجام است.
- در مقابل، برای مجموعه‌های فازی، انواع مختلفی از عمل‌ها برای اجتماع، اشتراک و مکمل قابل طرح می‌باشد.

- در مبحث قبل، عمل‌های زیر برای مجموعه‌های فازی مطرح گردید:

$$\overline{A} \to \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$A \cup B \to \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$A \cap B \to \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

---

## مکمل فازی:

- برای اینکه $c: [0,1] \to [0,1]$ نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه‌ی فازی A را به تابع عضویت مکمل A تبدیل کند یعنی

$$c[\mu_A(x)] = \mu_{\bar{A}}(x)$$

لازم است شرط‌های زیر برآورده گردد:

**Axiom c1.** $c(0) = 1$ and $c(1) = 0$ (boundary condition).

**Axiom c2.** For all $a, b \in [0,1]$, if $a < b$, then $c(a) \geq c(b)$ (nonincreasing condition)

## کلاس Sugeno برای مکمل فازی:

$$c_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a} \quad , \quad \lambda \in (-1, \infty)$$

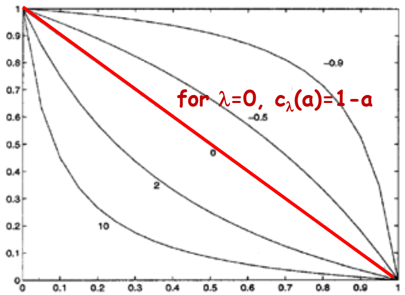



**Figure 3.1.** Sugeno class of fuzzy complements $c_\lambda(a)$ for different values of $\lambda$.

به ازای چه مقدار از λ ، مکمل فازی این کلاس به مکمل فازی پایه تبدیل می‌گردد؟

## کلاس Yager برای مکمل فازی:

$$c_w(a) = (1-a^w)^{1/w} \quad , \quad w \in (0, \infty)$$

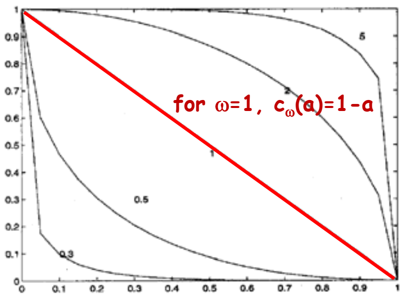



**Figure 3.2.** Yager class of fuzzy complements $c_w(a)$ for different values of $w$.

به ازای چه مقدار از ω ، مکمل فازی این کلاس به مکمل فازی پایه تبدیل می‌گردد؟

## اجتماع فازی:

- برای اینکه s: [0,1]×[0,1] → [0,1] نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه های فازی A و B را به تابع عضویت اجتماع A و B تبدیل کند یعنی

$$s[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cup B}(x)$$

لازم است شرط های زیر برآورده گردد:

**Axiom s1.** $s(1,1) = 1, s(0,a) = s(a,0) = a$ (boundary condition)

**Axiom s2.** $s(a,b) = s(b,a)$ (commutative condition)

**Axiom s3.** If $a \le a'$ and $b \le b'$, then $s(a,b) \le s(a',b')$ (nondecreasing condition)

**Axiom s4.** $s(s(a,b),c) = s(a,s(b,c))$ (associative condition)

- چنین نگاشتی را s-norm گویند.

## کلاس Dombi برای s-norm :

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^{-\lambda} + (\frac{1}{b}-1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0, \infty)$$

## کلاس Dubois-Prade برای s-norm :

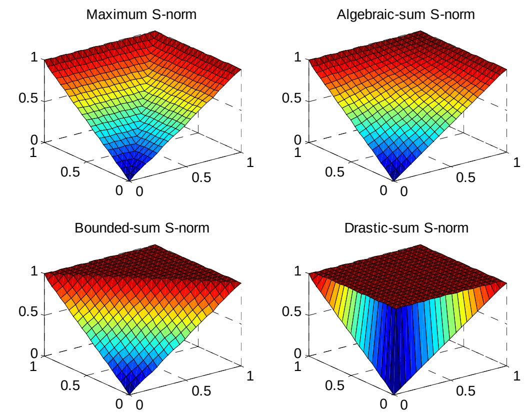
$$s_\alpha(a,b) = \frac{a+b-ab-min(a,b,1-\alpha)}{max(1-a,1-b,\alpha)} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

## کلاس Yager برای s-norm :

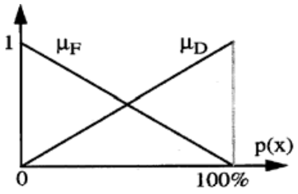
$$s_w(a,b) = min[1,(a^w+b^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0,\infty)$$

## دیگر توابع برای s-norm :

- **Drastic sum s-norm:** $s_{ds}(a,b) = \begin{cases} a \; if \; b=0 \\ b \; if \; a=0 \\ 1 \; otherwise \end{cases}$
- **Einstein sum s-norm:** $s_{es}(a,b) = \dfrac{a+b}{1+ab}$
- **Algebraic sum s-norm:** $s_{as}(a,b) = a+b-ab$
- **Maximum s-norm:** $s_{max}(a,b) = max(a,b)$



## مثال:




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.

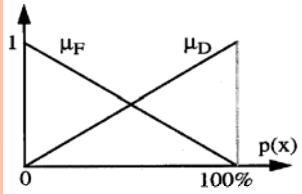
الف: s-norm ماکزیمم

ب: s-norm کلاس Yager به ازای ω=3

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

## حل مثال:




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.

الف: s-norm ماکزیمم

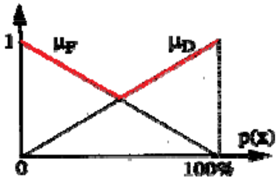
ب: s-norm کلاس Yager به ازای ω =3

ج: s-norm جمع جبری

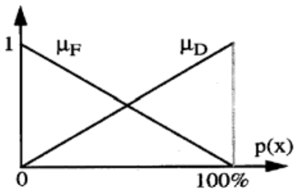
د: drastic sum s-norm

○ حل بند الف:

$$\mu_{F\cup D}(x) = max[\mu_F, \mu_D] = \begin{cases} \mu_F(x) & if \quad 0 \le p(x) \le 0.5 \\ \mu_D(x) & if \quad 0.5 \le p(x) \le 1 \end{cases}$$




## حل مثال:




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.

الف: s-norm ماکزیمم

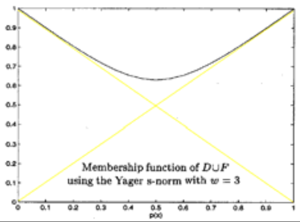
ب: s-norm کلاس Yager به ازای ω =3

ج: s-norm جمع جبری

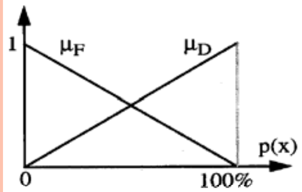
د: drastic sum s-norm

○ حل بند ب:

$$\mu_{D\cup F}(x) = s_w[\mu_D(x), \mu_F(x)] = min[1, ((p(x))^w + (1-p(x))^w)^{1/w}]$$




## حل مثال:




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.

الف: s-norm ماکزیمم

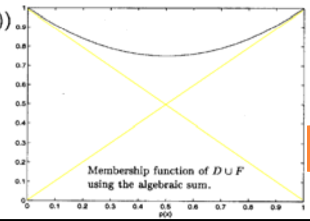
ب: s-norm کلاس Yager به ازای ω =3

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

○ حل بند ج:

$$\mu_{D\cup F}(x) = s_{as}[\mu_D(x), \mu_F(x)] = p(x) + (1-p(x)) - p(x)(1-p(x)) = 1 - p(x) + (p(x))^2$$



## مقایسه‌ی s-norm ها:

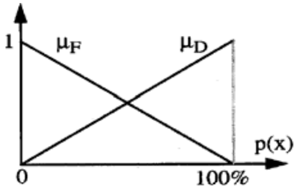
- ماکزیمم کوچکترین s-norm و drastic sum بزرگترین s-norm است.

به عبارت دیگر،

- برای هر s-norm دلخواه s داریم: $max(a,b) \le s(a,b) \le s_{ds}(a,b)$

## حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اجتماع این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از s-norm های زیر به دست آورید.




$\mu_D(x) = p(x)$

$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

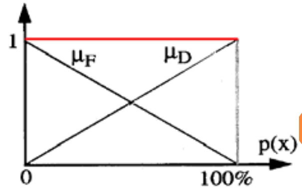
الف: s-norm ماکزیمم

ب: s-norm کلاس Yager به ازای $\omega = 3$

ج: s-norm جمع جبری

د: drastic sum s-norm

- حل بند د:




## ویژگی جالب s-norm کلاس Yager :

$$s_w(a,b) = min[1, (a^w + b^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0,\infty)$$

$$\lim_{w\to\infty} s_w(a,b) = max(a,b)$$

$$\lim_{w\to 0} s_w(a,b) = s_{ds}(a,b)$$

## ویژگی جالب s-norm کلاس Dombi :

$$s_\lambda(a,b) = \frac{1}{1 + [(\frac{1}{a} - 1)^{-\lambda} + (\frac{1}{b} - 1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} s_\lambda(a,b) = max(a,b)$$

$$\lim_{\lambda\to 0} s_\lambda(a,b) = s_{ds}(a,b)$$

## اشتراک فازی:

- برای اینکه t: [0,1]×[0,1] → [0,1] نگاشتی باشد که تابع عضویت مجموعه های فازی A و B را به تابع عضویت اشتراک A و B تبدیل کند یعنی

$$t[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cap B}(x)$$

لازم است شرط های زیر برآورده گردد:

**Axiom t1**: $t(0,0) = 0; t(a,1) = t(1,a) = a$ (boundary condition)

**Axiom t2**: $t(a,b) = t(b,a)$ (commutativity)

**Axiom t3**: If $a \le a'$ and $b \le b'$, then $t(a,b) \le t(a',b')$ (nondecreasing condition)

**Axiom t4**: $t[t(a,b),c] = t[a,t(b,c)]$ (associativity)

- چنین نگاشتی را t-norm گویند.

## کلاس Dombi برای t-norm :

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^\lambda + (\frac{1}{b}-1)^\lambda]^{1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

## کلاس Dubois-Prade برای t-norm :

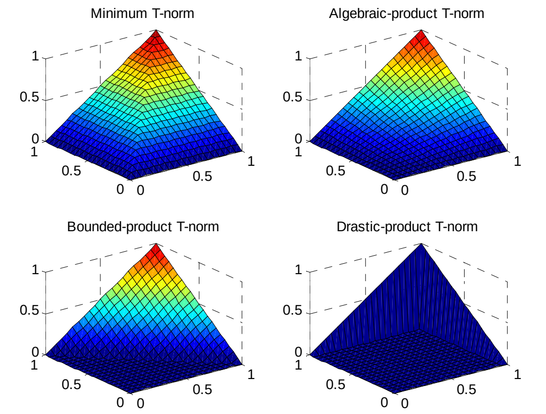
$$t_\alpha(a,b) = \frac{ab}{max(a,b,\alpha)} \quad , \quad \alpha \in [0,1]$$

## کلاس Yager برای t-norm :

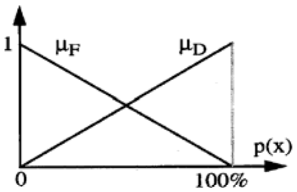
$$t_w(a,b) = 1 - min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}] \quad , \quad w \in (0,\infty)$$

## دیگر توابع برای t-norm :

- **Drastic product t-norm:** $t_{dp}(a,b) = \begin{cases} a \ if \ b=1 \\ b \ if \ a=1 \\ 0 \ otherwise \end{cases}$
- **Einstein product t-norm:** $t_{ep}(a,b) = \dfrac{ab}{2-(a+b-ab)}$
- **Algebraic product t-norm:** $t_{ap}(a,b) = ab$
- **Minimum t-norm:** $t_{min}(a,b) = min(a,b)$




**مثال:**




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی p(x) ∈[0,1] به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.

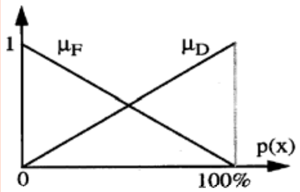
الف: t-norm مینیمم

ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

**حل مثال:**




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی p(x) ∈[0,1] به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.

الف: t-norm مینیمم

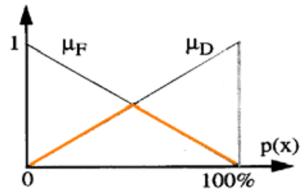
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

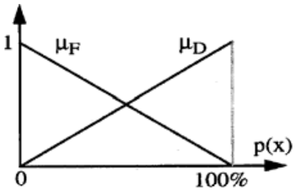
- حل بند الف:

$$\mu_{F\cap D}(x) = min[\mu_F, \mu_D] = \begin{cases} \mu_D(x) & if \quad 0 \le p(x) \le 0.5 \\ \mu_F(x) & if \quad 0.5 \le p(x) \le 1 \end{cases}$$



## حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

الف: t-norm مینیمم

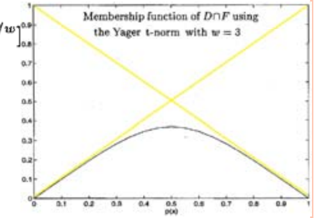
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

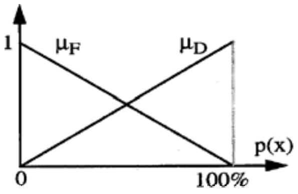
- حل بند ب:

$$\mu_{D\cap F}(x) = t_w[\mu_D(x), \mu_F(x)] = 1 - min[1, ((1-p(x))^w + (p(x))^w)^{1/w}]$$




## حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

الف: t-norm مینیمم

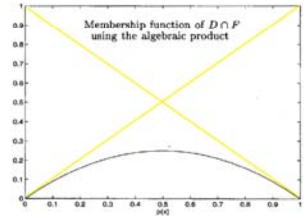
ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

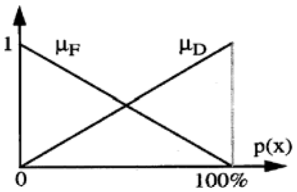
- حل بند ج:

$$\mu_{D\cap F}(x) = t_{ap}[\mu_D(x), \mu_F(x)] = p(x)(1 - p(x))$$




## حل مثال:

تابع عضویت مجموعه‌های D و F در محدوده‌ی $p(x) \in [0,1]$ به صورت روبرو توصیف شده است. اشتراک این دو مجموعه‌ی فازی را با استفاده از t-norm های زیر به دست آورید.




$\mu_D(x) = p(x)$
$\mu_F(x) = 1 - p(x)$

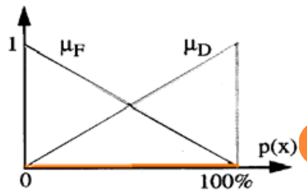
الف: t-norm مینیمم

ب: t-norm کلاس Yager به ازای w=3

ج: t-norm ضرب جبری

د: drastic product t-norm

- حل بند د:




## مقایسه‌ی t-norm ها:

- مینیمم بزرگترین t-norm و drastic product کوچکترین t-norm است.

به عبارت دیگر،

- برای هر t-norm دلخواه t داریم: $t_{dp}(a,b) \le t(a,b) \le min(a,b)$

## کلاس متناظر:

- اگر برای یک مجموعه ی عمل شامل s-norm، t-norm و complement ، قوانین دِمورگان برقرار باشد آنها را کلاس متناظر گویند.

به عبارت دیگر،

- عمل های s ، t و c تشکیل یک کلاس متناظر می دهند اگر:

$$c[s(a,b)] = t[c(a),c(b)]$$

**واژه‌نامه**

| | |
|---|---|
| کلاس متناظر | associated class |

## ویژگی جالب t-norm کلاس Dombi :

$$t_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+[(\frac{1}{a}-1)^\lambda + (\frac{1}{b}-1)^\lambda]^{1/\lambda}} \quad , \quad \lambda \in (0,\infty)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_\lambda(a,b) = min(a,b)$$

$$\lim_{\lambda\to 0} t_\lambda(a,b) = t_{dp}(a,b)$$

**مثال۲:**

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند.

$$Yager\ s-norm: \quad s_w(a,b) = \min\left[1, (a^w+b^w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

$$Yager\ t-norm: \quad t_w(a,b) = 1-\min\left[1, ((1-a)^w+(1-b)^w)^{\frac{1}{w}}\right]$$

$$basic\ complement: \quad c(a) = 1-a$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

**مثال۱:**

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند (کلاس متناظر زاده یا کلاس متناظر پایه).

$$maximum\ s-norm: \quad s(a,b) = \max(a,b)$$

$$minimum\ t-norm: \quad t(a,b) = \min(a,b)$$

$$basic\ complement: \quad c(a) = 1-a$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

if a ≥ b

s(a,b) = a, c(s(a,b)) = 1-a,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) = 1-a,

if a < b

s(a,b) = b, c(s(a,b)) = 1-b,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) = 1-b,

## مثال ۳:

نشان دهید عمل‌های زیر تشکیل یک کلاس متناظر می‌دهند.

$$\begin{aligned} &\textit{algebraic sum:} && s_{as}(a,b) = a + b - ab \\ &\textit{algebraic product:} && t_{ap}(a,b) = ab \\ &\textit{basic complement:} && c(a) = 1 - a \end{aligned}$$

c(s(a,b)) ? t(c(a),c(b))

s(a,b) = a+b-ab, c(s(a,b)) = 1-a-b+ab,

c(a) = 1-a, c(b) = 1-b, t(c(a),c(b)) =(1-a)(1-b)= 1-a-b+ab,

## عمل‌های میانگین‌گیری:

- یادآوری:

*Union:* $\max(a,b) \le s(a,b) \le s_{ds}(a,b)$

*Intersection:* $t_{dp}(a,b) \le t(a,b) \le \min(a,b)$

- بنابراین محدوده‌ی $[t_{dp}(a,b),\min(a,b)]$ توسط عمل اشتراک و محدوده‌ی $[\max(a,b),s_{ds}(a,b)]$ توسط عمل اجتماع پوشش داده می‌شود. از این رو، محدوده‌ی $[\min(a,b),\max(a,b)]$ توسط عمل‌های اشتراک و اجتماع پوشش داده نمی‌شود. عمل‌هایی که این محدوده را پوشش می‌دهند «عمل های میانگین‌گیری» نامیده شده و با **v** مشخص می‌گردند.

## عمل‌های میانگین‌گیری:

- **max-min averages:** $v_\lambda(a,b) = \lambda \max(a,b) + (1-\lambda)\min(a,b), \lambda \in [0,1]$
- **generalized means:** $v_\alpha(a,b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \alpha \in R \ (\alpha \neq 0)$
- **fuzzy and:** $v_p(a,b) = p\min(a,b) + \frac{(1-p)(a+b)}{2}, \quad p \in [0,1]$
- **fuzzy or:** $v_\gamma(a,b) = \gamma\max(a,b) + \frac{(1-\gamma)(a+b)}{2}, \quad \gamma \in [0,1]$

**سوال۱:** متوسط **max-min** به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\lambda$ چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

**[min(a,b),max(a,b)]**

**سوال۲:** میانگین تعمیم‌یافته به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\alpha$ چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

**[min(a,b),max(a,b)]**

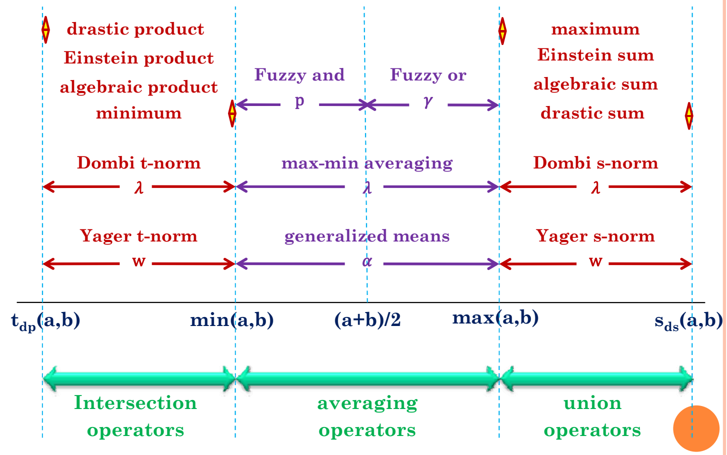
**سوال۳:** «**and** فازی» به ازای مقادیر مختلف پارامتر p چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

**[min(a,b), (a+b)/2]**

**سوال۴:** «**or** فازی» به ازای مقادیر مختلف پارامتر $\gamma$ چه محدوده‌ای را پوشش می‌دهد؟

**[(a+b)/2,max(a,b)]**

## جمع‌بندی:



# QUESTIONS?