هر که گوید جمله حق است احمقی است

آن که گوید جمله باطل، او شقی است

سیستم‌های فازی

3

Presented By: A. Maleki

Spring 2011

دستورکار این جلسه:

مجموعه‌های فازی و توابع عضویت

- مقدمه
- یادآوری مجموعه‌های کلاسیک، عمل‌ها و ویژگی‌های آنها
- معرفی مجموعه‌های فازی
- عمل‌های مجموعه‌های فازی
- ویژگی‌های مجموعه‌های فازی
- معرفی اصطلاحات تابع عضویت
- طبقه‌بندی مجموعه‌های فازی

مقدمه:

- مجموعه های کلاسیک یا تُرد دارای مرزهای مشخص هستند مثل: مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی زوج
- درحالی که مرز مجموعه های فازی دارای ابهام است مثل مجموعه افراد جوان قدبلند

سوال:

مجموعه های زیر در عالم بحث یا مجموعه مرجع دمای ۳۵ تا ۴۵ درجه تعریف شده اند. در مورد فازی یا تُرد (کلاسیک) بودن مجموعه ها نظر دهید.

- الف: محدوده ی دمایی ۳۷ تا ۴۰ درجه یا به عبارت دیگر [۳۷ ۴۰]
- ب: دمای تب شدید بدن

دقت کنید که در این مثال، مجموعه‌ی مرجع ماهیت پیوسته دارد و محدود است.

یادآوری مجموعه‌های کلاسیک:

فرض کنید X نشانگر مجموعه ی مرجع و x نشانگر اعضای آن باشد،

- با مفاهیم مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه‌ی تهی و مجموعه‌ی کامل آشنایی دارید.
- تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع، «عدد اصلی» یا «عدد کاردینال» مجموعه نامیده می‌شود.
- «مجموعه‌ی توان» به مجموعه‌ای شامل تمام زیرمجموعه‌های ممکن در مجموعه‌ی مرجع اطلاق می‌گردد و با P(X) مشخص می‌شود.

واژه‌نامه

عالم بحث یا مجموعه ی مرجع	universe of discourse
عدد اصلی یا عدد کاردینال	cardinal number
مجموعه تهی	null set
مجموعه کامل	whole set
مجموعه توان	power set

مثال:

برای مجموعه‌ی مرجع X={1,2,3,4}، عدد کاردینال، مجموعه‌ی توان و عدد کاردینال مجموعه‌ی توان را به دست آورید.

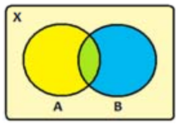
$\eta_X = 4$

$P(X) = \{ \varnothing , \{1\} , \{2\} , \{3\} , \{4\} , \{1,2\} , \{1,3\} , \{1,4\} , \{2,3\} , \{2,4\} , \{3,4\} , \{1,2,3\} , \{1,2,4\} , \{1,3,4\} , \{2,3,4\} , \{1,2,3,4\} \}$

$\eta_{P(X)} = 2^{\eta_X} = 2^4 = 16$

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:

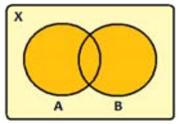
- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)
- تفاضل (difference)



دو مجموعه‌ی A و B را در مجموعه‌ی مرجع X در نظر بگیرید.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)
- تفاضل (difference)

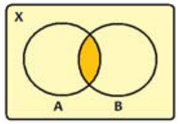


$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ or } x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه ی A و B که با نماد A∪B نشان داده می شود شامل اعضایی از مجموعه ی مرجع است که در A و/یا B وجود دارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)
- تفاضل (difference)

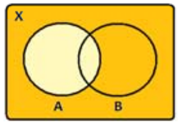


$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ and } x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه ی A و B که با نماد A∩B نشان داده می شود شامل اعضایی از مجموعه ی مرجع است که در A و B وجود دارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)
- تفاضل (difference)

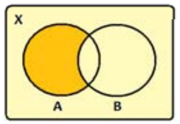


$$\overline{A} = \{x / x \notin A, x \in X\}$$

مکمل مجموعه‌ی A که با نماد A/ نشان داده می‌شود شامل اعضایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A وجود ندارند.

یادآوری عمل‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)
- تفاضل (difference)



$$A | B = \{x / x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

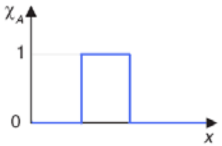
تفاضل مجموعه‌ی B از A که با نماد A | B نشان داده می‌شود شامل اعضایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A وجود دارند ولی در B وجود ندارند.

یادآوری ویژگی‌های مجموعه‌های کلاسیک:

- **Commutativity** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **Associative** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Distributivity** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Idempotency** $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
- **Identity** $A \cup \phi = A \quad A \cup X = X$, $A \cap \phi = \phi \quad A \cap X = A$
- **Transitivity** If $A \subseteq B \subseteq C$, then $A \subseteq C$
- **Involution** $\overline{\overline{A}} = A$
- **Excluded Middle Law** $A \cup \overline{A} = X$
- **Contradiction Law** $A \cap \overline{A} = \phi$
- **DeMorgan's Law** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

تعبیر مجموعه کلاسیک به عنوان تابع مشخصه:

مجموعه کلاسیک A را در نظر بگیرید. «تابع مشخصه»ی متناظر با این مجموعه به صورت زیر است:

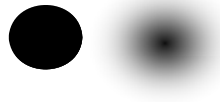


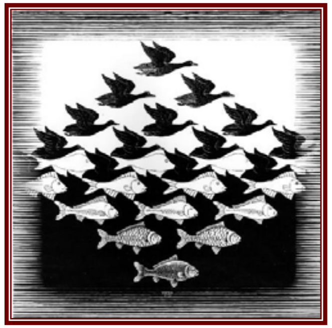
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

از این دیدگاه عمل‌ها به صورت زیر قابل بازنویسی است.

- **Union** $A \cup B \rightarrow \chi_{A\cup B}(x) = \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$
- **Intersection** $A \cap B \rightarrow \chi_{A\cap B}(x) = \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$
- **Complement** $\overline{A} \rightarrow \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$
- **Containment** $A \subseteq B \rightarrow \chi_A(x) \le \chi_B(x)$

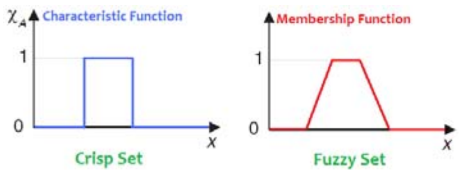
معرفی مجموعه‌ی فازی:





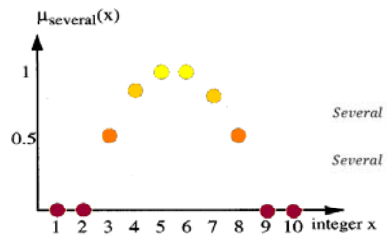
معرفی مجموعه‌ی فازی:

در مجموعه های کلاسیک، «تابع مشخصه» تنها دارای مقادیر صفر و یک است درحالی که برای مجموعه های فازی، «تابع عضویت» می تواند هر مقداری در فاصله ی صفر تا یک داشته باشد.



مثال۱:

تابع عضویت برای مجموعه فازی «چندین» در مجموعه اعداد طبیعی در محدوده ی [۰ ۱۰] .

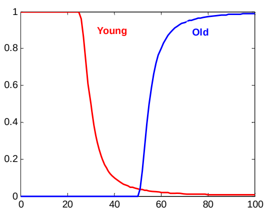


$$Several = \left\{ \frac{0.5}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{1.0}{5}, \frac{1.0}{6}, \frac{0.8}{7}, \frac{0.5}{8} \right\}$$

$$Several = \frac{0.5}{3} + \frac{0.8}{4} + \frac{1.0}{5} + \frac{1.0}{6} + \frac{0.8}{7} + \frac{0.5}{8}$$

مثال ۲:

مجموعه ی مرجع X در محدوده ی [۰ ۱۰۰] که نشانگر سن افراد عادی است را در نظر بگیرید. مجموعه های فازی جوان و پیر در آن به صورت زیر تعریف شده است.

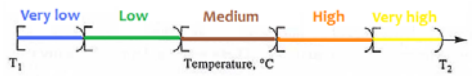


$$Young = \int_0^{25} \frac{1}{x} + \int_{25}^{100} \frac{\left[1+\left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right]^{-1}}{x}$$

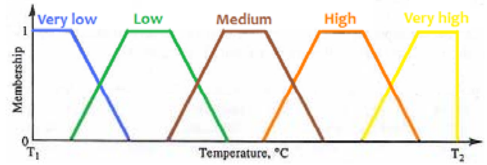
$$Old = \int_{50}^{100} \frac{\left[1+\left(\frac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}}{x}$$

مثال ۳:

- مجموعه‌های ترد:

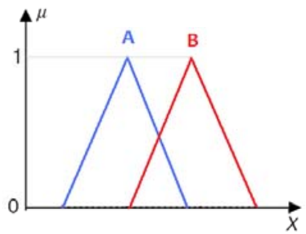


- مجموعه‌های فازی:



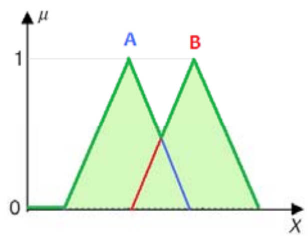
عمل‌های مجموعه‌های فازی:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)



عمل‌های مجموعه‌های فازی:

- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- مکمل (complement)



$$A \cup B \rightarrow \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

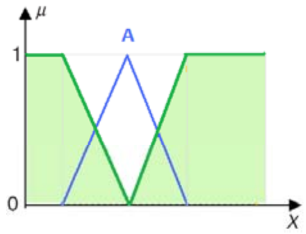
عمل‌های مجموعه‌های فازی:

- اجتماع (union)
- **اشتراک (intersection)**
- مکمل (complement)

$$A \cap B \rightarrow \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

عمل‌های مجموعه‌های فازی:

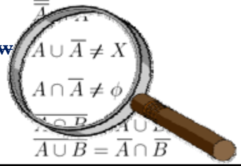
- اجتماع (union)
- اشتراک (intersection)
- **مکمل (complement)**



$$\overline{A} \rightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

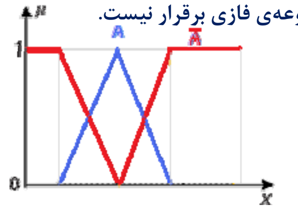
ویژگی‌های مجموعه‌های فازی:

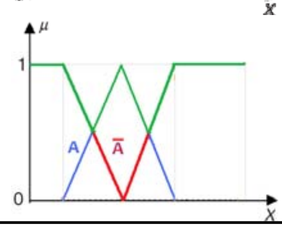
- **Commutativity** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **Associative** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Distributivity** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Idempotency** $A \cup A = A \quad A \cap A = A$
- **Identity** $A \cup \phi = A \quad A \cup X = X$, $A \cap \phi = \phi \quad A \cap X = A$
- **Transitivity** If $A \subseteq B \subseteq C$, then $A \subseteq C$
- **Involution** $\overline{\overline{A}} = A$
- ~~**Excluded Middle Law**~~ $A \cup \overline{A} \neq X$
- ~~**Contradiction Law**~~ $A \cap \overline{A} \neq \phi$
- **DeMorgan's Law** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

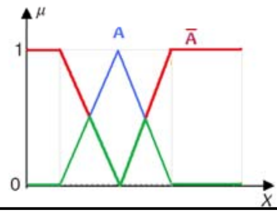


مثال۱:

مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید. با تعیین A/، A∪A/ و A∩A/ نشان دهید ویژگی‌های excluded middle law و contradiction law برای این مجموعه‌ی فازی برقرار نیست.







مثال ۲:

فرض کنید X مجموعه ی مرجع هواپیماهای تجاری باشد. اگر A مجموعه ی فازی هواپیماهای مسافری و B مجموعه ی فازی هواپیماهای باری باشد؛ اشتراک، اجتماع و مکمل آنها را به دست آورید.

$$X = \{A10, B52, B117, C5, C130, F4, F14, F15, F16, F111, KC130\}$$

$$A = \left\{\frac{0.4}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{1.0}{B117}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.6}{F14}, \frac{0.3}{F16}, \frac{0.7}{F111}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{0.4}{B117}, \frac{0.6}{F4}, \frac{0.9}{F14}, \frac{0.8}{F15}, \frac{1.0}{F16}, \frac{0.4}{F111}\right\}$$

$$A \cap B = \left\{\frac{0.4}{B117}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.6}{F14}, \frac{0.3}{F16}, \frac{0.4}{F111}\right\}$$

$$A \cup B = \left\{\frac{0.4}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{1.0}{B117}, \frac{0.6}{F4}, \frac{0.9}{F14}, \frac{0.8}{F15}, \frac{1.0}{F16}, \frac{0.7}{F111}\right\}$$

$$\bar{A} = \left\{\frac{0.6}{A10}, \frac{1.0}{C5}, \frac{1.0}{C130}, \frac{0.5}{F4}, \frac{0.4}{F14}, \frac{1.0}{F15}, \frac{0.7}{F16}, \frac{0.3}{F111}, \frac{1.0}{KC130}\right\}$$

$$\bar{B} = \left\{\frac{1.0}{A10}, \frac{1.0}{B52}, \frac{0.6}{B117}, \frac{1.0}{C5}, \frac{1.0}{C130}, \frac{0.4}{F4}, \frac{0.1}{F14}, \frac{0.2}{F15}, \frac{0.6}{F111}, \frac{1.0}{KC130}\right\}$$

تابع عضویت:

- تابع عضویت هر مجموعه نشانگر نگاشتی از هر یک از اعضای مجموعه به مقدار تعلق (عضویتی) بین صفر و یک است و به طور یکتا مجموعه را توصیف می کند.

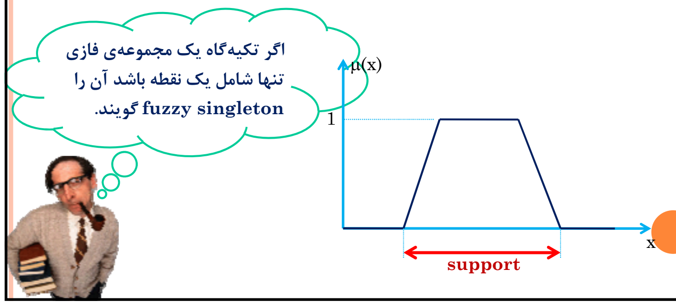
معرفی اصطلاحات مربوط به تابع عضویت:

- تکیه‌گاه (support)
- هسته (core)
- مرز (boundary)
- نقطه‌ی گذر (crossover point)
- ارتفاع (height)
- مرکز (center)
- برش آلفا (α-cut)

تکیه‌گاه (support) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها بیشتر از صفر است.

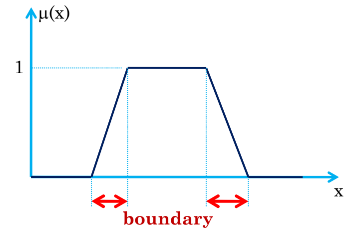
A: *fuzzy set*
U: *universe of discourse*
$support(A) = \{\, x \epsilon U \mid \mu_A(x) > 0 \,\}$



مرز (boundary) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها بیشتر از صفر و غیرکامل است.

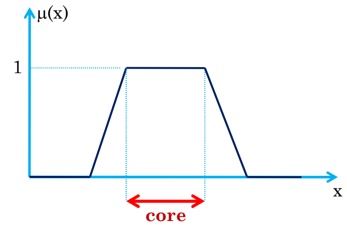
A: *fuzzy set*
U: *universe of discourse*
$boundary(A) = \{\, x\epsilon U \mid 0 < \mu_A(x) < 1 \,\}$



هسته (core) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی که مقدار عضویت آنها کامل (یک) است.

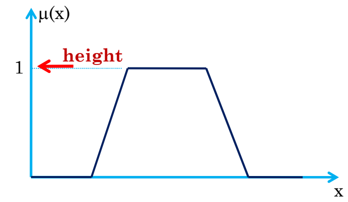
A: *fuzzy set*
U: *universe of discourse*
$core(A) = \{\, x\epsilon U \mid \mu_A(x) = 1 \,\}$



ارتفاع (height) :

- بیشینه‌ی مقادیر عضویت، ارتفاع مجموعه‌ی فازی را مشخص می‌کند.

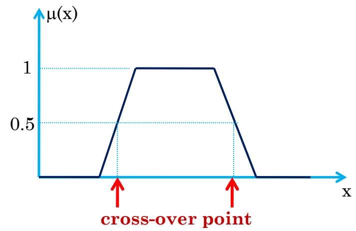
A: *fuzzy set*
U: *universe of discourse*
$H = sup\ \mu_A(x)$



نقطه‌ی گذر (cross-over point) :

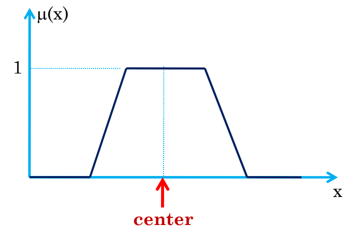
- اعضایی از مجموعه‌ی که مقدار عضویت آنها برابر ۰/۵ است.

A: *fuzzy set*
U: *universe of discourse*
x_{co} *is a crossover point if* $\mu_A(x) = 0.5$

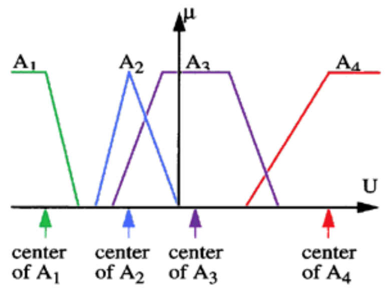


مرکز (center) :

- وسط محدوده‌ای که تابع عضویت ماکزیمم مقدار خودش را دارد. اگر این محدوده از یک سو به بی نهایت میل کند مرز محدود آن به عنوان مرکز در نظر گرفته می شود.



مثال:



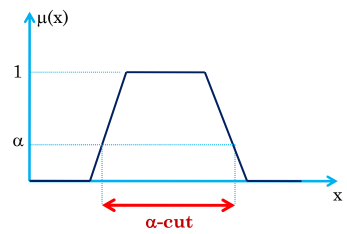
برش آلفا (α-cut) :

- مجموعه‌ای غیرفازی شامل تمام اعضایی از مجموعه‌ی مرجع که مقدار عضویت آنها بزرگتر یا مساوی آلفا است.

A: *fuzzy set*

U: *universe of discourse*

$$A_\alpha = \{\, x \epsilon U \mid \mu_A(x) \geq \alpha \,\}$$



طبقه‌بندی مجموعه‌های فازی:

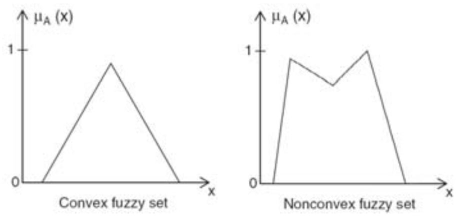
- مجموعه‌ی فازی نرمال و مجموعه‌ی فازی زیرنرمال
- مجموعه‌ی فازی محدب و مجموعه‌ی فازی غیرمحدب
- مجموعه‌ی فازی تهی و مجموعه‌ی فازی کامل
- تساوی و زیرمجموعه‌ی فازی

واژه‌نامه

normal fuzzy set	مجموعه‌ی فازی نرمال
subnormal fuzzy set	مجموعه‌ی فازی زیرنرمال
convex fuzzy set	مجموعه‌ی فازی محدب
non-convex fuzzy set	مجموعه‌ی فازی غیرمحدب
null fuzzy set	مجموعه‌ی فازی تهی
complete fuzzy set	مجموعه‌ی فازی کامل

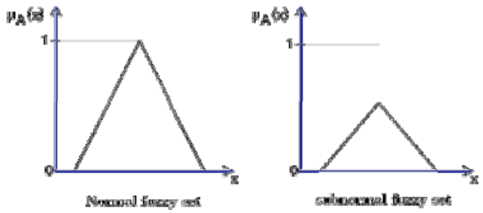
مجموعه فازی محدب و مجموعه فازی غیرمحدب:

- اگر تابع عضویت مجموعه‌ی فازی چنان باشد که با افزایش اعضای مجموعه ی مرجع، مقادیر عضویت دارای افزایش یکنوا، کاهش یکنوا یا افزایش و کاهش یکنوا باشند مجموعه‌ی فازی را محدب گویند. در غیر این صورت، مجموعه‌ی فازی غیرمحدب است.



مجموعه‌ی فازی نرمال و مجموعه‌ی فازی زیرنرمال:

- اگر ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی برابر یک باشد آن را مجموعه‌ی فازی نرمال و در غیر این صورت، آن را مجموعه فازی زیرنرمال گویند.



- اشتراک دو مجموعه‌ی فازی محدب، یک مجموعه‌ی فازی محدب خواهد بود.

- مجموعه‌ی فازی را محدب گوییم اگر و فقط اگر برش آلفای آن به ازای تمام مقادیر آلفای [0,1] ، مجموعه‌ای محدب باشد.

- مجموعه‌ی فازی A در فضای اقلیدسی n- بعدی R^n را محدب گوییم اگر و فقط اگر،

for all $x_1, x_2 \in R^n$ and all $\lambda \in [0,1]$.

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

مجموعه‌ی فازی کامل:

- مجموعه‌ی فازی را کامل گوییم اگر میزان تعلق تمام اعضای مجموعه‌ی مرجع به آن برابر یک باشد یا به عبارت دیگر، هسته‌ی آن برابر مجموعه‌ی مرجع باشد.

A: fuzzy set
U: universe of discourse
A is complete fuzzy set if $\mu_A(x) = 1$ for all $x \epsilon U$
or if core $(A) = U$

مجموعه‌ی فازی تهی:

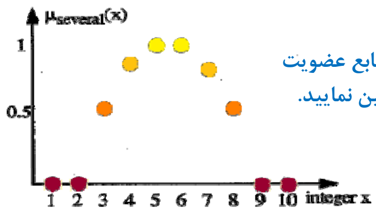
- مجموعه‌ی فازی را تهی گوییم اگر میزان تعلق تمام اعضای مجموعه‌ی مرجع به آن برابر صفر باشد یا به عبارت دیگر، تکیه‌گاه آن تهی باشد.

A: fuzzy set
U: universe of discourse
A is empty fuzzy set if $\mu_A(x) = 0$ for all $x \epsilon U$
or if $support(A) = \emptyset$

مثال:

برای مجموعه‌ی فازی «چندین» با تابع عضویت داده شده، ویژگی‌های زیر را تعیین نمایید.

الف: تکیه‌گاه
ب: هسته
ج: مرز
د: نقطه‌ی گذر
ه: ارتفاع
و: برش آلفا برای α = 0.75
ز: نرمال یا زیرنرمال بودن
ح: محدب یا غیرمحدب بودن.

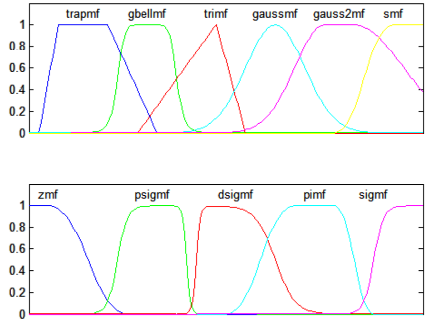


support = {3,4,5,6,7,8}
core = {5,6}
boundary = {3,4,7,8}
cross-over points = 3,8
height = 1
α-cut = {4,5,6,7} , for α=0.75
Normal
Convex

تساوی و زیرمجموعه‌ی فازی:

A, B : fuzzy set
U: universe of discourse
$A \subset B$ if $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ for all $x \epsilon U$
$A = B$ if $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ for all $x \epsilon U$
$A \subseteq B$ if $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ for all $x \epsilon U$

گالری توابع عضویت موجود در نرم‌افزار MATLAB:



QUESTIONS?