مبحث دوم

جبر بول و گیت‌های منطقی

Presented by A. Maleki Fall Semester, 2012

فهرست مطالب

معرفی جبر بول

جبر بول برای یک مجموعه و دو عملگر + و · تعریف می‌شود اگر اصل‌های Huntington برای آنها برقرار باشد.

اصل‌های Huntington

۱- مجموعه نسبت به عملگرها بسته باشد.

۲- مجموعه حداقل دارای دو عضو باشد.

۳- هر عضو مجموعه دارای یک عضو مکمل باشد.

۴- برای هر عملگر، یک عنصر همانی وجود داشته باشد (۰ برای + و ۱ برای ·).

۵- اعضای مجموعه نسبت به عملگرها دارای ویژگی جابجایی باشند.

۶- عملگرها نسبت به هم توزیع‌پذیر باشند.

واژه‌نامه:

اصول Huntington	Huntington Postulates
مکمل	Complement
عنصر همانی	Identity element

توجه کنید که **ویژگی شرکت‌پذیری** عملگرها در اصل‌های Huntington ذکر نشده است ولی برای جبر بول برقرار است. (این ویژگی در قضیه‌ها مطرح می‌گردد.)

توجه کنید که **توزیع‌پذیری جمع (+) روی ضرب (·)** در جبر کلاسیک برقرار نیست.

توجه کنید که در جبر بول، **عملگرها معکوس ندارند** (برخلاف جبر کلاسیک که تفریق و تقسیم در آن تعریف شده است.)

اصل‌های Huntington

۱- مجموعه نسبت به عملگرها بسته باشد.

۲- مجموعه حداقل دارای دو عضو باشد.

۳- هر عضو مجموعه دارای یک عضو مکمل باشد.

۴- برای هر عملگر، یک عنصر همانی وجود داشته باشد (۰ برای + و ۱ برای ·).

۵- اعضای مجموعه نسبت به عملگرها دارای ویژگی جابجایی باشند.

۶- عملگرها نسبت به هم توزیع‌پذیر باشند.

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☐ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☐ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☐ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☐ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☐ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☐ گسترش ورودی‌های گیت
- ☐ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

5

اصل‌های جبر بول

اصل اول (مکمل):	$x + x' = 1$	$x \,.\, x' = 0$
اصل دوم (عنصر همانی):	$x + 0 = x$	$x \,.\, 1 = x$
اصل سوم (ویژگی جابجایی):	$x + y = y + x$	$x \,.\, y = y \,.\, x$
اصل چهارم (توزیع‌پذیری):	$x.(y+z) = x.y + x.z$	$x + (y.z) = (x+y).(x+z)$

اصل دوگانی اگر یک معادله یا تساوی برقرار باشد دوگان آن نیز برقرار است.

سوال: آیا نمودی از اصل دوگانی در عبارت‌های ذکر شده به همراه اصل‌های جبر بول می‌بینید؟

برای تعیین دوگان یک عبارت، لازم است:
۱- عملگرهای + و . با یکدیگر جایگزین شوند.
۲- ۱ با ۰ و ۰ با ۱ جایگزین گردد.

واژه‌نامه:

اصل دوگانی	Duality Principle

6

قضیه‌های جبر بول

یادآوری

اصل اول (مکمل):	$x + x' = 1$	$x \,.\, x' = 0$
اصل دوم (عنصر همانی):	$x + 0 = x$	$x \,.\, 1 = x$
اصل سوم (ویژگی جابجایی):	$x + y = y + x$	$x \,.\, y = y \,.\, x$
اصل چهارم (توزیع‌پذیری):	$x.(y+z) = x.y + x.z$	$x + (y.z) = (x+y).(x+z)$

قضیه اول (همان‌توانی):	$x + x = x$	$x \,.\, x = x$
قضیه دوم:	$x + 1 = 1$	$x \,.\, 0 = 0$
قضیه سوم (بازگشت):		$(x')' = x$
قضیه چهارم (شرکت‌پذیری):	$x + (y+z) = (x+y) + z$	$x.(y.z) = (x.y).z$
قضیه پنجم (دمورگان):	$(x+y)' = x'.y'$	$(x.y)' = x' + y'$
قضیه ششم (جذب):	$x + x.y = x$	$x.(x+y) = x$
قضیه هفتم (consensus):	$(x+y).(x'+z).(y+z) = (x+y).(x'+z)$	$xy + x'z + yz = xy + x'z$
قضیه هشتم:	$xy + x'z = (x+z).(x'+y)$	$(x+y)(x'+z) = xz + x'y$

7

مثال: اثبات قضیه‌های جبر بول

با استفاده از اصل‌های جبر بول، قضیه‌ی اول را اثبات کنید.

$x \,.\, x = x$

$x + x = x$

یادآوری

اصل اول (مکمل):	$x + x' = 1$	$x \,.\, x' = 0$
اصل دوم (عنصر همانی):	$x + 0 = x$	$x \,.\, 1 = x$
اصل سوم (ویژگی جابجایی):	$x + y = y + x$	$x \,.\, y = y \,.\, x$
اصل چهارم (توزیع‌پذیری):	$x.(y+z) = x.y + x.z$	$x + (y.z) = (x+y).(x+z)$

8

مثال: اثبات قضیه‌های جبر بول

با استفاده از جدول درستی، قضیه‌ی دمورگان را اثبات کنید.

$(x.y)' = x' + y'$

$(x + y)' = x'.y'$

مثال: ساده‌سازی به روش دستکاری عبارت

با استفاده از قضیه‌ی consensus ، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف : $A'B' + AC + BC' + B'C + AB$

ب : $A'C'D + A'BD + BCD + ABC + ACD'$

تقدم عملگرها

مثال: ساده‌سازی به روش دستکاری عبارت

تابع منطقی روبرو را در نظر بگیرید: $F(x,y,z) = x'y'z + x'yz + xy'$

الف: با استفاده از اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول، این تابع را ساده کنید.

ب: تابع اصلی و تابع ساده شده را از لحاظ تعداد لیترال و تعداد جمله با هم مقایسه کنید.

ج: درستی ساده سازی را با استفاده از جدول درستی بررسی نمایید.

د: نمایش شماتیک مداری تابع اصلی و تابع ساده شده را با استفاده از گیت‌های منطقی ترسیم کنید.

فرم تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی دمورگان

$(A + B + C + \cdots + E)' = A'B'C' \ldots E'$

$(ABC \ldots E)' = A' + B' + C' + \cdots + E'$

13

مثال: اثبات فرم عمومی‌تر قضیه‌ی دِمورگان

نشان دهید تساوی روبرو برقرار است.

$(ABC)' = A' + B' + C'$

14

تعیین مکمل یک عبارت منطقی

برای به دست آوردن **مکمل** یک تابع لازم است:

❋ مقادیر ۰ با ۱ و مقادیر ۱ با ۰ جایگزین گردند.

❋ عمل‌های · به + و عمل‌های + به · تبدیل شوند.

❋ متغیرها مکمل گردند.

سوال: چه تفاوتی بین **دوگان** یک عبارت و **مکمل** آن وجود دارد؟

15

مثال: تعیین مکمل

مکمل تابع‌های روبرو را به روش‌های خواسته شده به دست آورید:

الف: با استفاده‌ی پی در پی از قضیه‌ی دمورگان

ب: به روش مستقیم

$F_1(x, y, z) = x'yz + x'y'z$

$F_2(x, y, z) = x(y'z' + yz)$

16

فهرست مطالب

17

معرفی MINTERMها و MAXTERMها در حالت سه متغیره:

x y z	Minterm		Maxterm	
	Term	Designation	Term	Designation

Minterm ها به صورت AND تمام متغیرها یا مکمل آنها است. اگر مقدار متغیر یک باشد از خود متغیر و در صورت صفر بودن، از مکمل متغیر استفاده می‌گردد.

Maxterm ها به صورت OR تمام متغیرها یا مکمل آنها است. اگر مقدار متغیر یک باشد از مکمل متغیر و در صورت صفر بودن، از خود متغیر استفاده می‌گردد.

سوال: چه ارتباطی بین M_j و m_j وجود دارد؟

18

فرم متعارف جمع MINTERMها:

- هر تابعی را می‌توان به صورت مجموع minterm ها بازنمایی نمود (در اینجا جمع به معنای OR جملات است). بدین منظور لازم است minterm هایی که تابع به ازای آنها مقدار ۱ دارد را با هم OR کنیم.
- همچنین برای به دست آوردن مکمل تابع می‌توان Mintermهایی که تابع به ازای آنها صفر می‌شود را با هم OR نمود.

19

مثال: توصیف به صورت جمع MINTERMها

x y z	f_1	f_2
0 0 0	0	0
0 0 1	1	0
0 1 0	0	0
0 1 1	0	1
1 0 0	1	0
1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	1

توابع f_1 و f_2 به صورت جدول درستی توصیف شده‌اند.

الف: عبارت منطقی این تابع‌ها را به صورت جمع mintermها بنویسید.

ب: عبارت منطقی مکمل این تابع‌ها را به صورت جمع mintermها بنویسید.

ج: با استفاده از عبارت منطقی $f_1{}'$ و قضیه‌ی دمورگان، f_1 را به دست آورید.

د: بر اساس نتایج بند ج، چگونه می‌توان با استفاده از جدول درستی، تابع را به صورت ضرب maxtermها توصیف نمود؟

20

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☐ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☐ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☐ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☐ گسترش ورودی‌های گیت
- ☐ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

21

بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی

- نمایش تابع منطقی
  - فرم متعارف
    - جمع minterm ها
    - ضرب maxterm ها
  - فرم استاندارد
    - جمع حاصل‌ضرب‌ها (SOP)
    - ضرب حاصل‌جمع‌ها (POS)
  - فرم غیراستاندارد

سوال: فرم‌های استاندارد و متعارف به پیاده‌سازی چندلایه منجر خواهد شد؟

فرم غیراستاندارد چطور؟

واژه‌نامه:

فرم متعارف	Canonical form
فرم استاندارد	Standard form
فرم غیر استاندارد	Nonstandard form
جمع حاصل‌ضرب‌ها	Sum of products (SOP)
ضرب حاصل‌جمع‌ها	Product of sums (POS)

22

مثال‌هایی از بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی

Canonical form: Sum of Minterms

$F(x,y,z) = x'yz' + xy'z' + xy'z + xyz' = \Sigma(2,4,5,6)$

Canonical form: Product of Maxterms

$F(x,y,z) = (x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y'+z') = \Pi(0,1,3,7)$

Standard form: Sum of Products (POS)

$F(x,y,z) = yz' + xy'$

Standard form: Product of Sums (POS)

$F(x,y,z) = (x+y)(y'+z')$

Non-standard form:

$F(x,y,z) = x.(y'z' + y'z + yz') + x'yz'$

23

مثال: مقایسه‌ی فرم‌های استاندارد و غیراستاندارد

تابع منطقی روبرو را در نظر بگیرید: $F(A,B,C) = AB + A'(B' + C)$

الف: تابع را به فرم استاندارد بازنویسی کنید.

ب: تابع را به فرم متعارف بازنویسی کنید.

ب: شماتیک مداری فرم اصلی، فرم استاندارد و فرم متعارف تابع را ترسیم کنید.

ج: بر اساس شماتیک‌های ترسیم شده، فرم استاندارد و فرم غیراستاندارد را از نظر تعداد سطوح منطقی مقایسه نمایید.

24

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☑ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ❑ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ❑ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ❑ گسترش ورودی‌های گیت
- ❑ منطق مثبت و منطق منفی
- ❑ مدارهای مجتمع

25

تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی

- ❖ تبدیل از یک فرم متعارف به فرم متعارف دیگر
- ❖ تبدیل از یک فرم استاندارد به یک فرم متعارف
- ❖ تبدیل از یک فرم استاندارد به فرم استاندارد دیگر
- ❖ تبدیل از یک فرم متعارف به یک فرم استاندارد
- ❖ تبدیل از یک فرم غیراستاندارد به یک فرم استاندارد

26

مثال: تبدیل از یک فرم متعارف به فرم متعارف دیگر

تابع منطقی روبرو را به فرم ضرب maxterm ها بازنویسی کنید. $F(A,B,C) = \Sigma(1,4,5,6,7)$

برای تبدیل از یک فرم متعارف به فرم متعارف دیگر باید:

۱- تبدیل Π به Σ و برعکس انجام شود.

۲- شماره‌هایی که وجود ندارند لیست شوند.

27

مثال: تبدیل از فرم غیرمتعارف به یکی از فرم‌های متعارف

تابع منطقی روبرو را به فرم جمع minterm ها بازنویسی کنید. $F(A,B,C) = A + B'C$

28

مثال: تبدیل از یک فرم استاندارد به فرم استاندارد دیگر

تابع منطقی روبرو را به فرم جمع حاصلضرب‌ها (SOP) بازنویسی کنید.

$F(A,B,C,D,E) = (A+B+C')(A+B+D)(A+B+E)(A+D'+E)(A'+C)$

یادآوری قضیه هشتم: $xy + x'z = (x+z).(x'+y)$ $(x+y)(x'+z) = xz + x'y$

30

مثال: تبدیل از فرم غیرمتعارف به یکی از فرم‌های متعارف

تابع منطقی روبرو را به فرم ضرب maxterm ها بازنویسی کنید. $F(x,y,z) = xy + x'z$

29

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☑ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☑ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☐ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☐ گسترش ورودی‌های گیت
- ☐ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

32

مثال: تبدیل از یک فرم استاندارد به فرم استاندارد دیگر

تابع منطقی روبرو را به فرم ضرب حاصل‌جمع‌ها (POS) بازنویسی کنید.

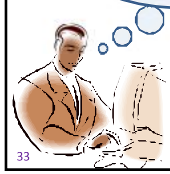
$F(A,B,C,D,E) = AC + A'BD' + A'BE + A'C'DE$

31

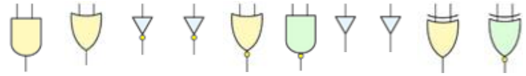
عمل‌ها و گیت‌های منطقی

برای n متغیر، چند تابع منطقی قابل تعریف است؟

برای n متغیر، 2^n ترکیب مختلف متغیرها و 2^{2^n} تابع مختلف وجود دارد. به عنوان نمونه، برای ۲ متغیر، ۴ ترکیب مختلف متغیرها و ۱۶ تابع منطقی وجود دارد.



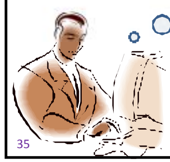
33



متغیرها	تابع‌های منطقی مختلف															
	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
عبارت منطقی		x.y		x		y	x⊕y	x+y	(x+y)'	(x⊕y)'	y'		x'		(x.y)'	
گیت منطقی		AND		Buffer		Buffer	XOR	OR	NOR	XNOR	NOT		NOT		NAND	
نماد شماتیک																

34

عمل **XOR** (n ورودی) یک تابع فرد است یعنی خروجی آن در صورتی یک خواهد شد که تعداد فردی از ورودی‌ها یک باشد.
عمل **XNOR** (n ورودی) یک تابع زوج است یعنی خروجی آن در صورتی یک خواهد شدکه تعداد زوجی از ورودی‌ها یک باشد.



35

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☑ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☑ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☑ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☐ گسترش ورودی‌های گیت
- ☐ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

36

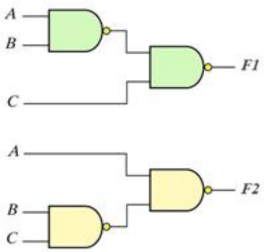
گسترش ورودی‌های گیت

اگر عمل دودویی گیت دارای ویژگی‌های
جابجایی و شرکت‌پذیری باشد می‌توان
ورودی‌های آن را گسترش داد.

Gate	Commutative Property	Associative Property
AND	√	√
OR	√	√
NAND	√	×
NOR	√	×
XOR	√	√
XNOR	√	√

37

مثال: جدول درستی را برای دو مدار زیر تشکیل دهید. براساس نتایج به دست آمده،
آیا NAND دارای ویژگی شرکت پذیری است؟



A B C	(AB)'	F1	(BC)'	F2
0 0 0				
0 0 1				
0 1 0				
0 1 1				
1 0 0				
1 0 1				
1 1 0				
1 1 1				

38

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☑ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☑ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☑ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☑ گسترش ورودی‌های گیت
- ☐ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

39

منطق مثبت و منطق منفی

سیگنال دیجیتال دارای دو سطح ولتاژ است که ولتاژ بالاتر با **H** (high) و ولتاژ پایین‌تر با **L** (low) مشخص می‌گردد.

منطق مثبت: نمایش **H** با **1** و نمایش **L** با **0** .

مثال: استاندارد TTL

Voltage	H/L	1/0
5	High	1
0	Low	0

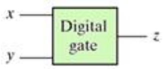
منطق منفی: نمایش **H** با **0** و نمایش **L** با **1** .

مثال: استاندارد RS232

Voltage	H/L	1/0
+15	High	0
-15	Low	1

40

منطق مثبت و منطق منفی



X	Y	Z
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

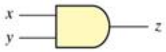
مثال: عملکرد یک المان با سطوح ولتاژ ورودی و خروجی آن در شرایط مختلف مشخص شده است.

الف: در منطق مثبت، این المان نشانگر چه قطعه‌ای است؟

ب: در منطق منفی، این المان نشانگر چه قطعه ای است؟

حل الف:

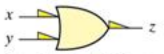
X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Positive logic AND gate

حل ب:

X	Y	Z
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



Negative logic OR gate

41

فهرست مطالب

- ☑ معرفی جبر بول
- ☑ اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- ☑ معرفی minterm ها و maxterm ها
- ☑ بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- ☑ تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- ☑ عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- ☑ گسترش ورودی‌های گیت
- ☑ منطق مثبت و منطق منفی
- ☐ مدارهای مجتمع

42

مدارهای مجتمع (Integrated Circuits)

سطوح مجتمع‌سازی مدارهای مجتمع

فناوری‌های مدارهای مجتمع

بسته‌بندی مدارهای مجتمع

43

تقسیم‌بندی مدارهای مجتمع از دیدگاه سطح مجتمع‌سازی:

1. Small Scale Integration (SSI)
   - < 10 gates — گیت‌ها
2. Medium Scale Integration (MSI)
   - 10- 1000 gates — شمارنده ها، فلیپ‌فلاپ‌ها
3. Large Scale Integration (LSI)
   - 1000-100’000 gates — حافظه ها، قطعات قابل برنامه ریزی
4. Very Large Scale Integration (VLSI)
   - > 100’000 gates — ریزپردازنده‌ها، DSP ، FPGA

44

مدارهای مجتمع از دیدگاه فناوری

تقسیم‌بندی مدارهای مجتمع از دیدگاه فناوری:

1. Transistor Transistor Logic (TTL)

یار دیر آشنا

2. Emitter-Coupled Logic (ECL)

سرعت بالا

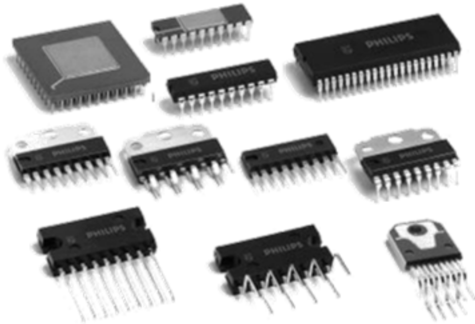
3. Metal Oxide Semiconductor (MOS)

چگالی بالا

4. Complementary Metal Oxide Semiconductor (CMOS)

مصرف پایین

بسته‌بندی مدارهای مجتمع



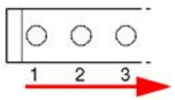
- SIP
- ZIP
- DIP
- SOIC-SOP
- PLCC
- QFP
- PGA
- BGA

شکل ظاهری

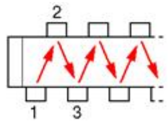
نحوه‌ی شماره‌گذاری پایه‌ها:

وقتی سر علامت دار در سمت چپ و پایین قرار دارد شمارش به صورت پادساعتگرد انجام می گردد.

SIP: Single Inline Package



ZIP: Zig-zag Inline Package

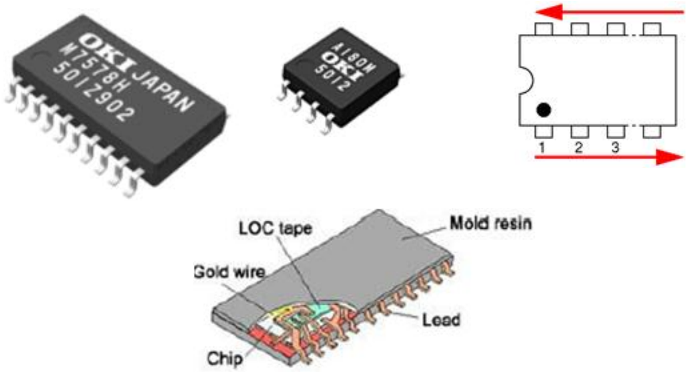


DIP: Dual Inline Package

49

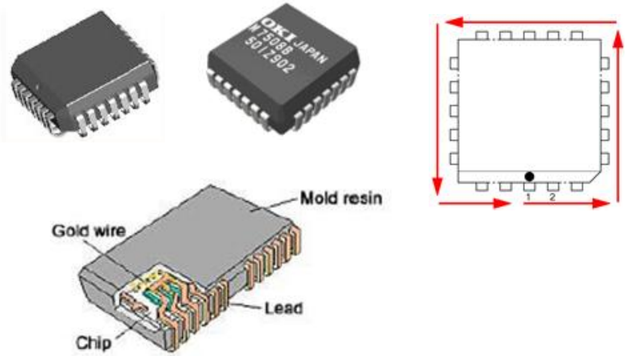
SOIC: Small Outline Integrated Circuit

SOP: Small Outline Package



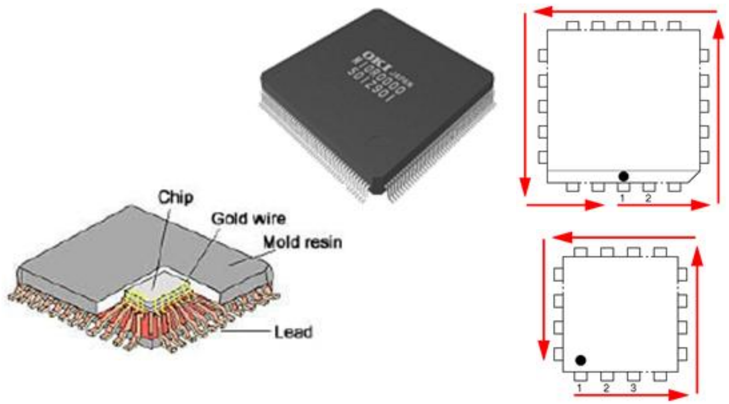
50

PLCC: Plastic Leaded Chip Carrier



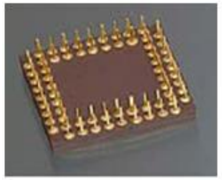
51

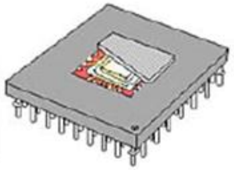
QFP: Quad Flat Package

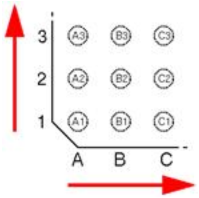


52

PGA: Pin Grid Array

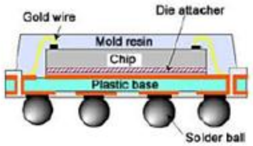


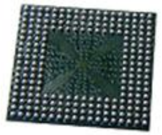


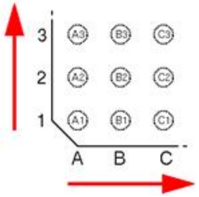


53

BGA: Ball Grid Array





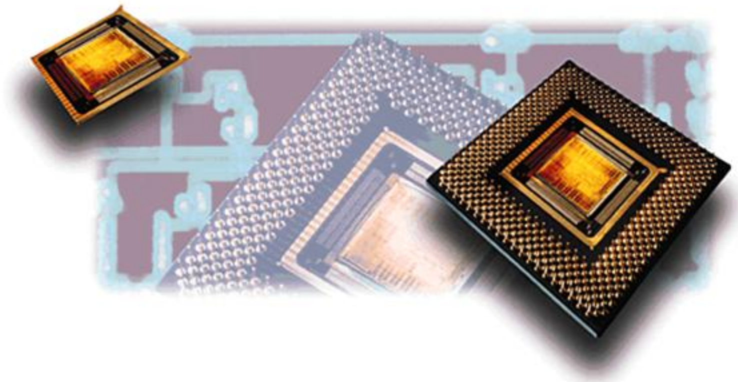


54

فهرست مطالب

- معرفی جبر بول
- اصل‌ها و قضیه‌های جبر بول
- معرفی minterm ها و maxterm ها
- بازنمایی‌های مختلف تابع منطقی
- تبدیل فرم‌های مختلف بازنمایی تابع منطقی
- عمل‌ها و گیت‌های منطقی
- گسترش ورودی‌های گیت
- منطق مثبت و منطق منفی
- مدارهای مجتمع

55



56